Vorlesung aus dem Sommersemester 2012

Algebraische Gruppen

Dr. Roland Lötscher

geTEXt von Viktor Kleen

Inhaltsverzeichnis

I. Die Kategorie der (affinen) algebraischen Gruppen

Alle Ringe seien bis auf weiteres kommutativ und wir bezeichnen mit **Ring** die Kategorie der kommutativen Ringe, mit k-**Alg** die Kategorie der kommutativen k-Algebren, mit **Grp** die Kategorie der Gruppen, mit **Sch** die Kategorie der Schemata und mit **Set** die Kategorie der Mengen.

Zuerst ein kurzer Exkurs zu so genannten natürlichen Transformationen zwischen Funktoren. Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zwei Kategorien und $F_1, F_2 \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ zwei parallele Funktoren. Eine *natürliche Transformation* $t\colon F_1 \longrightarrow F_2$ ist eine Familie $t_x\colon F_1(x) \longrightarrow F_2(x)$ von Morphismen in $\mathcal{D}$ parametrisiert durch Objekte $x \in \mathcal{C}$, die “natürlich” ist, d.h. für alle Morphismen $f\colon x \longrightarrow y \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} F_1(x) \arrow[r, dash, "t_x"] \arrow[d, dash, "F_1(f)"'] & F_2(x) \arrow[d, dash, "F_2(f)"] \\ F_1(y) \arrow[r, dash, "t_y"'] & F_2(y). \end{tikzcd}$$

I.1. Algebraische Gruppen und Morphismen

Wir beginnen mit folgender Beobachtung. Einige Gruppen treten in Familien auf, parametrisiert durch kommutative Ringe R, z.B.

$$\mathrm{SL}_n(R) = \{(a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(R)\colon\ \det(a_{ij}) = 1\}$$

oder

$$\mathrm{O}_n(R) = \{(a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(R)\colon\ A^T A = \mathbb{1}\}.$$

Wir wollen SL_n, O_n etc. verstehen “ohne das R”. Ein Ringhomomorphismus $f\colon R \longrightarrow R'$ induziert einen Gruppenhomomorphismus $\mathrm{SL}_n(f)\colon\ \mathrm{SL}_n(R) \longrightarrow \mathrm{SL}_n(R')$ durch komponentweises anwenden von f, d.h. $\mathrm{SL}_n(f)(a_{ij}) = (f(a_{ij}))$. Es gilt $\mathrm{SL}_n(\mathrm{id}_R) = \mathrm{id}_{\mathrm{SL}_n(R)}$ und $\mathrm{SL}_n(f \circ g) = \mathrm{SL}_n(f) \circ \mathrm{SL}_n(g)$. In anderen Worten ist SL_n ein Funktor **Ring** $\longrightarrow$ **Grp**. Analog erhalten wir einen Funktor $\mathrm{O}_n\colon$ **Ring** $\longrightarrow$ **Grp**. Das etwas Besondere am Funktor SL_n (und O_n) ist der Bezug zur algebraischen Geometrie, nämlich erhält man $\mathrm{SL}_n(R)$ durch Lösen von polynomialen Gleichungen. Anders betrachtet ist

$$\mathrm{SL}_n(R) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(\mathbb{Z}[X_{ij}]/(\det(X_{ij}) - 1), R).$$

Nämlich entsprechen allgemein die Ringhomomorphismen $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]/I \longrightarrow R$ genau den Tupeln $(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ mit $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ für alle $f \in I$. Allgemeiner entsprechen für einen Ring k die k-Algebrenhomomorphismen $k[X_1, \ldots, X_n]/I \longrightarrow R$ genau den Tupeln $(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ mit $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ für alle $f \in I$. Mittels der Theorie der Schemata kann man auch schreiben

$$\mathrm{SL}_n(R) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\operatorname{Spec} R, \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[X_{ij}]/(\det(X_{ij}) - 1)),$$

d.h. die Gruppe $\mathrm{SL}_n(R)$ steht in Bijektion mit den R-rationalen Punkten des Schemas $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[X_{ij}]/(\det(X_{ij})-1)$. Man sagt, der Funktor SL_n sei *darstellbar* durch den Ring $\mathbb{Z}[X_{ij}]/(\det(X_{ij})-1)$. Solche darstellbaren Funktoren $\mathbf{Ring} \longrightarrow \mathbf{Grp}$ interessieren uns. Statt Funktoren $\mathbf{Ring} \longrightarrow \mathbf{Grp}$, betrachten wir aber allgemeiner für einen festen Grundring k Funktoren k-$\mathbf{Alg} \longrightarrow \mathbf{Grp}$. Meist wird k ein Körper sein. Dies ist tatsächlich eine Verallgemeinerung, denn $\mathbf{Ring} \cong \mathbb{Z}$-$\mathbf{Alg}$.

Sei k ein (fester) kommutativer Ring und sei $\alpha \in k$ fest. Für eine kommutative k-Algebra R betrachte den Ring $R[X]/(X^2-\alpha) = R \oplus Rx$ mit Einheitengruppe

$$(R \oplus Rx)^\times = \{u + vx \colon u^2 - v^2\alpha \in R^\times\}.$$

Diese Einheitengruppe enthält eine Untergruppe $\{u + vx \colon u^2 - v^2\alpha = 1\}$. Definiere Funktoren $G^{(\alpha)} \colon k\text{-}\mathbf{Alg} \longrightarrow \mathbf{Grp}$ und $N^{(\alpha)} \colon k\text{-}\mathbf{Alg} \longrightarrow \mathbf{Grp}$ durch

$$\begin{aligned} G^{(\alpha)}(R) &= (R \oplus Rx)^\times = \{u + vx \in R \oplus Rx \colon u^2 - v^2\alpha \in R^\times\}, \\ N^{(\alpha)}(R) &= \{u + vx \in (R \oplus Rx)^\times \colon u^2 - v^2\alpha = 1\} \end{aligned}$$

und $G^{(\alpha)}(f)(u+vx) = f(u) + f(v)x$ und $N^{(\alpha)}(f)(u+vx) = f(u) + f(v)x$ für einen k-Algebrenhomomorphismus $f \colon R \longrightarrow R'$. Dann ist $N^{(\alpha)}$ darstellbar durch die k-Algebra $k[U,V]/(U^2 - V^2\alpha - 1)$, d.h. $N^{(\alpha)}(R) \cong \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[U,V]/(U^2 - V^2\alpha - 1), R)$. Auch der Funktor $G^{(\alpha)}$ ist darstellbar, nämlich durch $k[U,V,W]/((U^2 - V^2\alpha)W - 1)$. Diese Algebra ist isomorph zur Lokalisierung von $k[U,V]$ am Element $U^2 - V^2\alpha$. Dafür schreiben wir $k[U,V,(U^2 - V^2\alpha)^{-1}]$, auch wenn k nicht notwendigerweise ein Integritätsring ist.

Definition 1. Sei k ein kommutativer Ring. Wir bezeichnen mit $V \colon \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Set}$ den Vergissfunktor.

(i) Ein k-*Gruppenfunktor* ist ein Funktor $G \colon k\text{-}\mathbf{Alg} \longrightarrow \mathbf{Grp}$.

(ii) Ein k-Gruppenfunktor G heißt *darstellbar*, falls eine k-Algebra A existiert, so dass $V \circ G \colon k\text{-}\mathbf{Alg} \longrightarrow \mathbf{Set}$ natürlich isomorph ist zum so genannten *Punktefunktor* $h^A \colon k\text{-}\mathbf{Alg} \longrightarrow \mathbf{Set}$ von A, gegeben durch $h^A(R) = \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(A,R)$ für jede k-Algebra R und $h^A(f)(\varphi) = f \circ \varphi$ für jeden k-Algebrenhomomorphismus $f \colon R \longrightarrow R'$, d.h. es existierten Bijektionen von Mengen $t_R \colon G(R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(A,R)$, so dass für alle k-Algebrenhomomorphismen $f \colon R \longrightarrow R'$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G(R) \arrow[r, "t_R"] \arrow[d, "G(f)"'] & \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(A,R) \arrow[d, "h^A(f)"] \\ G(R') \arrow[r, "t_{R'}"'] & \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(A,R') \end{tikzcd}$$

kommutiert.

(iii) Wir nennen einen k-Gruppenfunktor G eine *algebraische Gruppe* oder genauer *algebraische k-Gruppe* oder *algebraische Gruppe über k*, falls G durch eine endlich erzeugte k-Algebra darstellbar ist.

Beispiele. Die Funktoren SL_n, O_n, $G^{(\alpha)}$ und $N^{(\alpha)}$ sind algebraische Gruppen. Ein weiteres Beispiel ist die *triviale algebraische Gruppe* $1\colon k\text{-}\mathbf{Alg} \longrightarrow \mathbf{Grp}$ mit $1(R) = \{1\}$. Sie ist darstellbar durch die k-Algebra k.

Ein weniger triviales Beispiel ist die *additive Gruppe* $\mathbb{G}_a$ mit $\mathbb{G}_a(R) = (R, +)$. Dieser Funktor ist darstellbar, denn $R \cong \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[X], R)$. Ähnlich erhält man die *multiplikative Gruppe* $\mathbb{G}_m$ mit $\mathbb{G}_m(R) = R^\times$. Dieser Funktor ist darstellbar durch die k-Algebra $k[X, X^{-1}] \cong k[X, Y]/(XY - 1)$.

Ein weiteres Beispiel ist die algebraische Gruppe $\mathrm{GL}_n\colon k\text{-}\mathbf{Alg} \longrightarrow \mathbf{Grp}$ mit

$$\mathrm{GL}_n(R) = \{(a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(R)\colon\ \det(a_{ij}) \in R^\times\}.$$

Sie ist darstellbar durch die k-Algebra $k[X_{ij}, \det(X_{ij})^{-1}]$. Es ist $\mathrm{GL}_1 \cong \mathbb{G}_m$.

Definition 2.

(i) Seien G und H k-Gruppenfunktoren. Ein Morphismus $G \longrightarrow H$ ist eine natürliche Transformation von Funktoren $k\text{-}\mathbf{Alg} \longrightarrow \mathbf{Grp}$, d.h. eine Familie von Gruppenhomomorphismen $t_R\colon G(R) \longrightarrow H(R)$ parametrisiert durch kommutative k-Algebren R, so dass für jeden k-Algebrenhomomorphismus $f\colon R \longrightarrow R'$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G(R) \arrow[r, "t_R"] \arrow[d, "G(f)"'] & H(R) \arrow[d, "H(f)"] \\ G(R') \arrow[r, "t_{R'}"'] & H(R') \end{tikzcd}$$

kommutiert.

(ii) Sind G und H algebraische k-Gruppen, so ist ein Morphismus $G \longrightarrow H$ von algebraischen k-Gruppen ein Morphismus $G \longrightarrow H$ von k-Gruppenfunktoren. Wir schreiben $\mathrm{Hom}(G, H)$ für die Menge der Morphismen $G \longrightarrow H$ und k-$\mathbf{Grp}$ für die Kategorie der algebraischen k-Gruppen.

Definition 3. Sei $a\colon G \longrightarrow H$ ein Morphismus von k-Gruppenfunktoren. Wir nennen den k-Gruppenfunktor $\ker a\colon k\text{-}\mathbf{Alg} \longrightarrow \mathbf{Grp}$ mit $R \longmapsto \ker a_R$ den *Kern* von a. Man bemerke, dass alle Diagramme

$$\begin{tikzcd} G(R) \arrow[r, "a_R"] \arrow[d, "G(f)"'] & H(R) \arrow[d, "H(f)"] \\ G(R') \arrow[r, "a_{R'}"'] & H(R') \end{tikzcd}$$

kommutieren; deshalb gilt jeweils $G(f)(\ker a_R) \subset \ker a_{R'}$ und so erhalten wir tatsächlich einen Funktor $\ker a$.

Beispiel. Wir haben einen Morphismus $\det\colon \mathrm{GL}_n \longrightarrow \mathbb{G}_m$ mit Kern SL_n und einen Morphismus $G^{(\alpha)} \longrightarrow \mathbb{G}_m$

$$\begin{aligned} G^{(\alpha)}(R) &\longrightarrow R^\times \\ u + vx &\longmapsto u^2 - v^2\alpha \end{aligned}$$

mit Kern $N^{(\alpha)}$. Ebenso sind die Inklusionen $\mathrm{SL}_n \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$ und $N^{(\alpha)} \hookrightarrow G^{(\alpha)}$ Morphismen von k-Gruppen. Diese haben trivialen Kern.

I.2. Untergruppen und Faserprodukte

Definition 4. Seien G und H k-Gruppenfunktoren. dann heißt H *Untergruppenfunktor* von G, falls $H(R) \subset G(R)$ für alle $R \in k\text{-}\mathbf{Alg}$.

Als *k-Mengenfunktor* bezeichnen wir einen Funktor $k\text{-}\mathbf{Alg} \longrightarrow \mathbf{Set}$. Wir definieren einen k-Mengenfunktor $\mathbb{A}^1_k$ durch $\mathbb{A}^1_k(R) = R \in \mathbf{Set}$ für $R \in k\text{-}\mathbf{Alg}$ und $\mathbb{A}^1_k(f) = f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{Set})$ für $f \in \mathrm{Mor}(k\text{-}\mathbf{Alg})$. Es ist $\mathbb{A}^1_k \cong \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[X], -)$. Sind X und Y k-Mengenfunktoren, so schreiben wir $\mathrm{Nat}(X, Y)$ für die Menge der natürlichen Transformationen $X \longrightarrow Y$.

Definition 5. Sei G eine k-Gruppenfunktor. Definiere $k[G] := \mathrm{Nat}(V \circ G, \mathbb{A}^1_k)$ mit dem Vergissfunktor $V\colon \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Set}$.

Ein Element von $k[G]$ ist eine Familie von Abbildungen $t_R\colon G(R) \longrightarrow R$, so dass für jeden k-Algebrenhomomorphismus $f\colon R \longrightarrow R'$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G(R) \arrow[r, "t_R"] \arrow[d, "G(f)"'] & R \arrow[d, "f"] \\ G(R') \arrow[r, "t_{R'}"'] & R' \end{tikzcd}$$

kommutiert. Insbesondere haben wir für jedes $c \in k$ ein Element $c \in k[G]$ definiert durch $G(R) \ni g \longmapsto c \in R$ für alle $R \in k\text{-}\mathbf{Alg}$. Elemente von $k[G]$ lassen sich addieren, subtrahieren und multiplizieren. Zum Beispiel definiert man $(t + t')_R(g) = t_R(g) + t'_R(g)$ für $R \in k\text{-}\mathbf{Alg}$ und $g \in G(R)$ und erhält eine Abbildung $+\colon k[G] \times k[G] \longrightarrow k[G]$. Analog definiert man "$-$" und "$\cdot$". Insgesamt erhalten wir die Struktur einer kommutativen k-Algebra auf $k[G]$.

Jedes Element $g \in G(R)$, $R \in k\text{-}\mathbf{Alg}$, definiert einen k-Algebrenhomomorphismus $\mathrm{ev}_g\colon k[G] \longrightarrow R$ mit $\mathrm{ev}_g(t) = t_R(g)$. Damit erhalten wir eine natürliche Transformation

$\alpha\colon V \circ G \longrightarrow h^{k[G]}$ mit $\alpha_R(g) = \mathrm{ev}_g \in \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[G], R)$. Wir müssen dafür noch zeigen, dass für jeden k-Algebrenhomomorphismus $f\colon R \longrightarrow R'$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G(R) \arrow[r, "\alpha_R"] \arrow[d, "G(f)"'] & \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[G], R) \arrow[d, "h^{k[G]}(f)"] \\ G(R') \arrow[r, "\alpha_{R'}"'] & \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[G], R'). \end{tikzcd}$$

kommutiert. Es gilt für $g \in G(R)$ die Gleichung

$$\mathrm{ev}_{G(f)(g)}(t) = t_{R'}(G(f)(g)) = f(t_R(g)) = (f \circ \mathrm{ev}_g)(t)$$

für alle $t \in k[G]$, d.h. $\alpha_{R'} \circ G(f)(g) = \mathrm{ev}_{G(f)(g)} = f \circ \mathrm{ev}_g = f \circ \alpha_R(g)$, also folgt die Aussage.

Proposition 6. *Die natürliche Transformation $\alpha\colon V \circ G \longrightarrow h^{k[G]}$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn G darstellbar ist.*

Zum Beweis von Proposition 6 benötigen wir das so genannte Yoneda-Lemma, das auch unabhängig von Interesse ist.

Lemma 7 (Yoneda-Lemma)**.** *Sei B eine kommutative k-Algebra und F ein k-Mengenfunktor. Dann ist die Zuordnung*

$$\begin{aligned} \mathrm{Nat}(h^B, F) &\longrightarrow F(B) \\ t &\longmapsto t_B(\mathrm{id}_B) \end{aligned}$$

bijektiv.

Beweis. Wir konstruieren eine Inverse $F(B) \longrightarrow \mathrm{Nat}(h^B, F)$. Sei $x \in F(B)$. Für jedes $R \in k\text{-}\mathbf{Alg}$ definiere eine Abbildung $t_R^{(x)}\colon \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(B, R) \longrightarrow F(R)$ durch $t_R^{(x)}(g) = F(g)(x)$. Das definiert eine natürliche Transformation $t^{(x)}$, denn

$$(t_{R'}^{(x)} \circ h^B(f))(g) = F(f \circ g)(x) = F(f)(F(g)(x)) = (F(f) \circ t_R^{(x)})(g)$$

für jeden k-Algebrenhomomorphismus $f\colon R \longrightarrow R'$.

Es bleibt zu zeigen, dass die beiden natürlichen Transformationen tatsächlich invers zueinander sind. Für jedes $x \in F(B)$ gilt $t_B^{(x)}(\mathrm{id}_B) = F(\mathrm{id}_B)(x) = x$. Ist umgekehrt $s \in \mathrm{Nat}(h^B, F)$, so gilt

$$t_R^{(s_B(\mathrm{id}_B))}(g) = F(g)(s_B(\mathrm{id}_B)) = s_R(g \circ \mathrm{id}_B) = s_R(g)$$

für alle $g \in \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(B, R)$ und $R \in k\text{-}\mathbf{Alg}$, da s natürlich ist. $\square$

Korollar 8. *Seien B und B' kommutative k-Algebren. Dann ist die kanonische Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathrm{Nat}(h^B, h^{B'}) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{k\text{-}\boldsymbol{Alg}}(B', B) \\ t &\longmapsto t_B(\mathrm{id}_B) \end{aligned}$$

bijektiv und ihre Inverse $t^{(-)}\colon \mathrm{Hom}_{k\text{-}\boldsymbol{Alg}}(B', B) \longrightarrow \mathrm{Nat}(h^B, h^{B'})$ *ist gegeben durch* $t_R^{(\alpha)}(g) = g \circ \alpha$.

Diese Zuordnung ist kompatibel mit Komposition und bewahrt Identitäten. Insbesondere ist $t \in \mathrm{Nat}(h^B, h^{B'})$ *genau dann ein Isomorphismus, wenn der zugehörige k-Algebrenhomomorphismus* $t_B(\mathrm{id}_B)\colon B' \longrightarrow B$ *ein Isomorphismus ist.*

Beweis. Sind natürliche Transformationen $t\colon h^B \longrightarrow h^{B'}$ und $t'\colon h^{B'} \longrightarrow h^{B''}$ gegeben, so ist $(t' \circ t)_B(\mathrm{id}_B) = (t'_B \circ t_B)(\mathrm{id}_B)$. Nun kommutiert das Diagram

$$\begin{tikzcd} h^{B'}(B') \arrow[r, "t'_{B'}"] \arrow[d, "h^{B'}(t_B(\mathrm{id}_B))"'] & h^{B''}(B') \arrow[d, "h^{B''}(t_B(\mathrm{id}_B))"] \\ h^{B'}(B) \arrow[r, "t'_B"'] & h^{B''}(B), \end{tikzcd}$$

also ist $(t'_B \circ t_B)(\mathrm{id}_B) = t_B(\mathrm{id}_B) \circ t'_{B'}(\mathrm{id}_{B'})$, was durch Betrachten des Bildes von $\mathrm{id}_{B'}$ folgt. Ist schließlich $t = \mathrm{id}_{h^B}$, so folgt $t_B(\mathrm{id}_B) = \mathrm{id}_B$. □

Beweis von Proposition 6. Ist α ein Isomorphismus, so ist natürlich G darstellbar. Sei also G darstellbar, d.h. es existiere ein natürlicher Isomorphismus $\varphi\colon h^B \xrightarrow{\sim} V \circ G$ mit einer k-Algebra B. Wir zeigen, dass $\alpha \circ \varphi\colon h^B \longrightarrow h^{k[G]}$ ein Isomorphismus ist, woraus dann die Behauptung folgt. Nach Korollar 8 genügt es dafür zu zeigen, dass der entsprechende k-Algebrenhomomorphismus $(\alpha \circ \varphi)_B(\mathrm{id}_B)\colon k[G] \longrightarrow B$ bijektiv ist. Es gilt $(\alpha \circ \varphi)_B(\mathrm{id}_B) = \alpha_B(\varphi_B(\mathrm{id}_B)) = \mathrm{ev}_{\varphi_B(\mathrm{id}_B)}$. Nun haben wir aber einen Isomorphismus

$$k[G] = \mathrm{Nat}(V \circ G, \mathbb{A}^1_k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Nat}(h^B, \mathbb{A}^1_k) \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^1_k(B) = B,$$

dessen Bild an $\varepsilon \in k[G]$ genau $(\varepsilon \circ \varphi)_B(\mathrm{id}_B) = \varepsilon_B(\varphi_B(\mathrm{id}_B)) = \mathrm{ev}_{\varphi_B(\mathrm{id}_B)}(\varepsilon)$ ist. Also ist $(\alpha \circ \varphi)_B(\mathrm{id}_B) = \mathrm{ev}_{\varphi_B(\mathrm{id}_B)}$ bijektiv. □

Folgerung. Ist G ein darstellbarer k-Gruppenfunktor, z.B. eine algebraische k-Gruppe, so ist eine darstellende k-Algebra bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und wir haben eine kanonische Wahl dafür, nämlich $k[G] = \mathrm{Nat}(V \circ G, \mathbb{A}^1_k)$.

Wir führen folgende Notation ein. Ist $a\colon G \longrightarrow H$ ein Morphismus von k-Gruppenfunktoren, dann schreiben wir $a^*\colon k[H] \longrightarrow k[G]$ für den induzierten k-Algebrahomomorphismus. Für $t \in k[H] = \mathrm{Nat}(V \circ H, \mathbb{A}^1_k)$ gilt $a^*(t) = t \circ Va$, wobei $Va\colon V \circ G \longrightarrow V \circ H$ die natürliche Transformation definiert durch $(Va)_R = V(a_R)$ (gleich $a_R\colon G(R) \longrightarrow H(R)$ betrachtet als Abbildung) ist.

Bemerkung. Die Identifikation $\alpha_G \colon V \circ G \xrightarrow{\sim} h^{k[G]}$ für darstellbare k-Gruppenfunktoren G ist natürlich in G, d.h. wenn $a \colon G \longrightarrow H$ ein Morphismus von darstellbaren k-Gruppenfunktoren ist, so kommutiert

$$\begin{tikzcd} V \circ G \arrow[r, "\sim", "\alpha_G"', no head] \arrow[d, "Va"', no head] & h^{k[G]} \arrow[d, "t^{(a^*)}", no head] \\ V \circ H \arrow[r, "\sim", "\alpha_H"', no head] & h^{k[H]}. \end{tikzcd}$$

Dies folgt aus der Rechnung

$$\mathrm{ev}_g \circ a^*(t) = \mathrm{ev}_g(t \circ Va) = (t \circ Va)_R(g) = t_R \circ a_R(g) = t_R(a_R(g)) = \mathrm{ev}_{a_R(g)}(t),$$

für $t \in k[G]$, $g \in G(R)$ und $R \in k$-**Alg**, also $\mathrm{ev}_g \circ a^* = \mathrm{ev}_{a_R(g)}$, folglich

$$(t^{(a^*)} \circ \alpha_G)_R(g) = t_R^{(a^*)} \circ \mathrm{ev}_g = \mathrm{ev}_g \circ a^* = \mathrm{ev}_{a_R(g)} = (\alpha_H)_R \circ a_R(g) = (\alpha_H \circ Va)_R(g).$$

Definition 9. Sei G eine algebraische k-Gruppe und H ein darstellbarer Untergruppenfunktor von G. Dann nennen wir H eine *Untergruppe* von G, falls der durch die Inklusion $\iota \colon H \hookrightarrow G$ induzierte k-Algebrenhomomorphismus $\iota^* \colon k[G] \longrightarrow k[H]$ surjektiv ist.

Bemerkung. Man spricht in der Situation von Definition 9 auch von *abgeschlossenen* Untergruppen in Analogie zur Sprache der Schemata, in der ein surjektiver Ringhomomorphismus einer abgeschlossenen Immersion affiner Schemata entspricht. Genauer entspricht eine Untergruppe H einer k-Gruppe G tatsächlich einem abgeschlossenen Unterschema des G entsprechenden affinen Schemas $\mathrm{Spec}(k[G])$. Wir werden später sehen, dass im Fall, dass k ein Körper ist, jeder darstellbare Untergruppenfunktor eine Untergruppe ist.

Jede Untergruppe einer algebraischen k-Gruppe ist wiederum eine algebraische k-Gruppe, denn die Darstellbarkeit wird schon vorausgesetzt und ist $k[G]$ endlich erzeugt, so auch $k[H]$, denn es existiert ein surjektiver k-Homomorphismus $k[G] \twoheadrightarrow k[H]$.

Eine algebraische k-Gruppe G ist Untergruppe ihrer selbst, denn $\mathrm{id} \colon k[G] \longrightarrow k[G]$ ist surjektiv; ebenso ist immer $\{1\}$ eine Untergruppe von G, denn $k[G] \longrightarrow k[\{1\}] = k$ ist surjektiv.

Beispiel. Die Gruppe SL_n ist Untergruppe von GL_n, denn $\mathbb{Z}[\mathrm{GL}_n] \longrightarrow \mathbb{Z}[\mathrm{SL}_n]$ entspricht dem Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[X_{ij}, \det{}^{-1}] &\xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}[X_{ij}]/(\det - 1), \\ X_{ij} &\longmapsto \overline{X_{ij}} \end{aligned}$$

denn man hat für jeden Ring R ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(\mathbb{Z}[X_{ij}]/(\det -1), R) \arrow[r, "\pi^*"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(\mathbb{Z}[X_{ij}, \det^{-1}], R) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{SL}_n(R) \arrow[r] & \mathrm{GL}_n(R),
\end{tikzcd}$$

und man erhält ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
h^{\mathbb{Z}[X_{ij}]/(\det -1)} \arrow[r, "t^{(\pi)}"] \arrow[d, "\wr"] & h^{\mathbb{Z}[X_{ij}, \det^{-1}]} \arrow[d, "\wr"] \\
V \circ \mathrm{SL}_n \arrow[r] & V \circ \mathrm{GL}_n
\end{tikzcd}$$

von natürlichen Transformationen. Hiermit ergibt sich aus Lemma 7 die Behauptung. Ebenso ist $N^{(\alpha)}$ eine Untergruppe von $G^{(\alpha)}$.

Wir studieren nun Faserprodukte von algebraischen Gruppen. Diese Konstruktion enthält einige wichtige Spezialfälle, etwa das direkte Produkt $G \times H$ von algebraischen Gruppen, den Kern von Morphismen $H \longrightarrow G$, das Urbild einer Untergruppe $H' \subset H$ unter einem Morphismus $G \longrightarrow H$ und den Durchschnitt $H \cap H'$ zweier Untergruppen $H, H' \subset G$.

Definition 10. Seien $a\colon H \longrightarrow G$ und $a'\colon H' \longrightarrow G$ Morphismen von k-Gruppenfunktoren. Wir definieren das *Faserprodukt* $H \times_G H'$ von H und H' über G (bezüglich a und a') durch

$$H \times_G H'(R) = \{(h, h') \in H(R) \times H'(R)\colon a_R(h) = a'_R(h')\}$$

für jede k-Algebra R und

$$\begin{aligned} H \times_G H'(R) &\longrightarrow H \times_G H'(R') \\ (h, h') &\longmapsto (H(f)(h), H'(f)(h')) \end{aligned}$$

für jeden k-Algebrenhomomorphismus $f\colon R \longrightarrow R'$. Das ist eine wohldefinierte Abbildung, denn $a_{R'}(H(f)(h)) = G(f)(a_R(h)) = G(f)(a'_R(h')) = a'_{R'}(H'(f)(h'))$, da a und a' natürliche Transformationen sind. Die Menge $H \times_G H'(R)$ ist eine Untergruppe des direkten Produkts $H(R) \times H'(R)$, also ist $H \times_G H'$ tatsächlich ein k-Gruppenfunktor.

Lemma 11. *Sind H, G und H' algebraische k-Gruppen, so auch $H \times_G H'$ und es gilt $k[H \times_G H'] \cong k[H] \otimes_{k[G]} k[H']$ bezüglich $a^*\colon k[G] \longrightarrow k[H]$ und $a'^*\colon k[G] \longrightarrow k[H']$ für die darstellende k-Algebra von $H \times_G H'$.*

Beweis. Es gilt aufgrund der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts, dass

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[H] \otimes_{k[G]} k[H'], R) \cong \\
&\cong \{(h, h') \in \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[H], R) \times \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[H'], R) \colon h \circ a^* = h' \circ a'^*\} \cong \\
&\cong \{(h, h') \in H(R) \times H'(R) \colon a_R(h) = a'_R(h')\} = \\
&= H \times_G H'(R),
\end{aligned}$$

worin alle Isomorphismen natürlich in R sind, d.h. $H \times_G H'$ ist durch $k[H] \otimes_{k[G]} k[H']$ dargestellt. Da außerdem $k[H] \otimes_{k[G]} k[H']$ endlich erzeugt ist, wenn $k[H]$ und $k[H']$ es sind, ist $H \times_G H'$ eine algebraische k-Gruppe. □

Beispiele. Ist $G = \{1\}$, so ist $H \times_{\{1\}} H' =: H \times H'$ das *direkte Produkt* von H und H'. Es gilt $H \times H'(R) = H(R) \times H'(R)$. Sind H und H' algebraische k-Gruppen, so auch $H \times H'$ mit $k[H \times H'] \cong k[H] \otimes_k k[H']$.

Sei $a' \colon H' \hookrightarrow G$ die Inklusion eines Untergruppenfunktors. Dann ist

$$\begin{aligned}
H \times_G H'(R) &= \{(h, h') \in H(R) \times H'(R) \colon a_R(h) = h'\} = \\
&= \{(h, a_R(h)) \in H(R) \times G(R) \colon h \in a_R^{-1}(H'(R))\} \cong a_R^{-1}(H'(R))
\end{aligned}$$

das *Urbild* von $H' \subset G$ unter $a \colon H \longrightarrow G$. Wir schreiben $a^{-1}(H')$ für den k-Gruppenfunktor

$$\begin{aligned}
k\text{-}\mathbf{Alg} &\longrightarrow \mathbf{Grp} \\
R &\longmapsto a_R^{-1}(H'(R)).
\end{aligned}$$

Speziell ist $a^{-1}(\{1\}) = \ker a$ der Kern von a.

Lemma 12. *Ist $a \colon H \longrightarrow G$ ein Morphismus von algebraischen k-Gruppen und ist H' eine Untergruppe von G, so ist $a^{-1}(H')$ eine Untergruppe von H. Insbesondere ist* $\ker a$ *eine Untergruppe von H.*

Beweis. Wir wissen nach Lemma 11, dass $a^{-1}(H')$ darstellbar ist. Es bleibt also zu zeigen, dass der k-Algebrenhomomorphismus $k[H] \longrightarrow k[a^{-1}(H')] \cong k[H] \otimes_{k[G]} k[H']$ surjektiv ist, wenn $k[G] \longrightarrow k[H']$ surjektiv ist. Dies folgt aus dem folgenden Lemma 13. □

Lemma 13. *Sei $\varphi \colon B \longrightarrow A$ ein Homomorphismus kommutativer k-Algebren und $I \subset B$ ein Ideal. Dann ist $A \otimes_B B/I \cong A/\varphi(I)A$ und man hat ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_B B/I \arrow[rr, "\sim"] & & A/\varphi(I)A. \\
& A \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Man überprüft die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts. Man hat ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "\varphi"'] & B/I \arrow[d, dash] \\
A \arrow[r, dash] & A/\varphi(I)A,
\end{tikzcd}$$

und ist

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "\varphi"'] & B/I \arrow[d, dash, "\beta"] \\
A \arrow[r, dash, "\alpha"'] & C
\end{tikzcd}$$

ein weiteres kommutatives Quadrat, so zeigt eine Diagrammjagd, dass $\varphi(I)A \subset \ker \alpha$. Damit faktorisiert α eindeutig durch $A/\varphi(I)A$ und dann ist, da $B \twoheadrightarrow B/I$ surjektiv ist, das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & B/I \arrow[d, dash] \arrow[ddr, dash, bend left, "\beta"] & \\
A \arrow[r, dash] \arrow[drr, dash, bend right, "\alpha"'] & A/\varphi(I)A \arrow[dr, dash, dashed] & \\
 & & C
\end{tikzcd}$$

kommutativ. □

Beispiel. Sind $a\colon H \hookrightarrow G$ und $a'\colon H' \hookrightarrow G$ beides Inklusionen von Untergruppenfunktoren, so ist

$$\begin{aligned}
H \times_G H'(R) &= \{(h, h') \in H(R) \times H'(R)\colon h = h' \text{ in } G(R)\} = \\
&= \{(h, h) \in G(R)\colon h \in H(R) \cap H'(R)\} \cong \\
&\cong H(R) \cap H'(R).
\end{aligned}$$

Wir nennen den Funktor

$$\begin{aligned}
k\text{-}\mathbf{Alg} &\longrightarrow \mathbf{Grp} \\
R &\longmapsto H(R) \cap H'(R)
\end{aligned}$$

den *Durchschnitt* von H und H'. Ist G eine algebraische k-Gruppe und sind H und H' Untergruppen von G, so ist $H \cap H'$ sowohl eine Untergruppe von H wie auch von H'.

I.3. Hopfalgebren

Sei G ein darstellbarer k-Gruppenfunktor. Wir haben drei natürliche Transformationen von k-Mengenfunktoren, welche die Gruppenstruktur beschreiben, nämlich die Multiplikation $V\circ G\times V\circ G \longrightarrow V\circ G$ mit $(g,g')\longmapsto gg'$, das neutrale Element $V\circ 1\longrightarrow V\circ G$ mit $1\longmapsto 1_{G(R)}$ und die Inversenabbildung $V\circ G\longrightarrow V\circ G$ mit $g\longmapsto g^{-1}$ auf R-Punkten. Die Natürlichkeit dieser Zuordnungen ist äquivalent dazu, dass die $G(f)\colon G(R)\longrightarrow G(R')$ Gruppenhomomorphismen sind. Mittels Lemma 7 und Proposition 6 entsprechen diese natürlichen Transformationen k-Algebrenhomomorphismen $c\colon A\longrightarrow A\otimes_k A$, der *Komultiplikation*, $u\colon A\longrightarrow k$, der *Koeinheit*, und $i\colon A\longrightarrow A$, der *Koinversen*, wobei $A = k[G]$ sei. Die Homomorphismen c, u und i sind im folgenden Sinn miteinander verträglich. Es kommutieren

$$\begin{tikzcd}
A\otimes_k A\otimes_k A \arrow[r, dash, "\mathrm{id}_A\otimes c"] \arrow[d, dash, "c\otimes\mathrm{id}_A"'] & A\otimes_k A \arrow[d, dash, "c"] \\
A\otimes_k A \arrow[r, dash, "c"'] & A,
\end{tikzcd} \tag{A}$$

die *Koassoziativität*,

$$\begin{tikzcd}
k\otimes_k A \arrow[r, dash, "u\otimes\mathrm{id}_A"] \arrow[d, dash, "\wr"'] & A\otimes_k A \arrow[d, dash, "c"] \\
A \arrow[r, equal] & A
\end{tikzcd} \tag{B}$$

und

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, dash, "(i{,}\mathrm{id}_A)"] \arrow[d, dash] & A\otimes_k A \arrow[d, dash, "c"] \\
k \arrow[r, dash, "u"'] & A.
\end{tikzcd} \tag{C}$$

Dies ist eine Umformulierung der Gruppenaxiome

$$\begin{tikzcd}
G(R)\times G(R)\times G(R) \arrow[r, dash, "\mathrm{id}_{G(R)}\times\mathrm{mult}"] \arrow[d, dash, "\mathrm{mult}\times\mathrm{id}_{G(R)}"'] & G(R)\times G(R) \arrow[d, dash, "\mathrm{mult}"] \\
G(R)\times G(R) \arrow[r, dash, "\mathrm{mult}"'] & G(R),
\end{tikzcd} \tag{A$'$}$$

$$\begin{tikzcd}
\{1\}\times G(R) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & G(R)\times G(R) \arrow[d, dash, "\mathrm{mult}"] \\
G(R) \arrow[r, equal] & G(R)
\end{tikzcd} \tag{B$'$}$$

und

$$
\begin{tikzcd}
G(R) \arrow[r, "g \mapsto (g^{-1}, g)"] \arrow[d] & G(R) \times G(R) \arrow[d, "\mathrm{mult}"] \\
\{1\} \arrow[r] & G(R).
\end{tikzcd}
\tag{C$'$}
$$

Definition 14. Eine kommutative k-Algebra A zusammen mit k-Algebrenhomomorphismen $c\colon A \longrightarrow A \otimes_k A$, $u\colon A \longrightarrow k$ und $i\colon A \longrightarrow A$, welche die Axiome (A), (B) und (C) erfüllen, heißt *Hopfalgebra* über k.

Aus der vorangegangenen Diskussion folgt, dass für jeden darstellbaren k-Gruppenfunktor G die darstellende Algebra $k[G]$ mit den zugehörigen k-Algebrenhomomorphismen c, u und i eine Hopfalgebra über k ist. Umgekehrt definiert jede Hopfalgebra über k einen darstellbaren k-Gruppenfunktor. Ist nämlich A eine Hopfalgebra über k, so definieren wir für $R \in k$-**Alg** auf $h^A(R)$ eine Gruppenstruktur mittels c wie folgt:

$$
\begin{tikzcd}
h^{A \otimes_k A}(R) = \mathrm{Hom}_k(A \otimes_k A, R) \cong \mathrm{Hom}_k(A, R) \times \mathrm{Hom}_k(A, R) \arrow[d] & (g, g') \arrow[d, mapsto] \\
h^A(R) = \mathrm{Hom}_k(A, R) & (g, g') \circ c
\end{tikzcd}
$$

Die Gruppenaxiome folgen aus (A), (B) und (C), wobei das neutrale Element von $h^A(R)$ durch

$$
A \xrightarrow{u} k \longrightarrow R
$$

und die Inverse von $g\colon A \longrightarrow R$ durch

$$
A \xrightarrow{i} A \xrightarrow{g} R
$$

gegeben ist. Wir erhalten einen k-Gruppenfunktor $G^A\colon k$-**Alg** $\longrightarrow$ **Grp** mit $V \circ G^A = h^A$. Insbesondere ist G^A darstellbar. Ebenso definieren wir Morphismen von Hopfalgebren über k in Korrespondenz zu Morphismen von (darstellbaren) k-Gruppenfunktoren. Sind G und H darstellbare k-Gruppenfunktoren, so kommt eine natürliche Transformation $t\colon V \circ G \longrightarrow V \circ H$ von einer natürlichen Transformation von k-Gruppenfunktoren $G \longrightarrow H$, falls

$$
\begin{tikzcd}
V \circ G \times V \circ G \arrow[r, "\mathrm{mult}"] \arrow[d, "t \times t"'] & V \circ G \arrow[d, "t"] \\
V \circ H \times V \circ H \arrow[r, "\mathrm{mult}"'] & V \circ H
\end{tikzcd}
$$

kommutiert. Übersetzt, mit $A = k[G]$, $B = k[H]$, kommutiert

$$\begin{tikzcd} A \otimes_k A \arrow[r, dash, "c_A"] \arrow[d, dash, "t^* \otimes t^*"'] & A \arrow[d, dash, "t^*"] \\ B \otimes_k B \arrow[r, dash, "c_B"'] & B, \end{tikzcd}$$

d.h. $c_A \circ t^* = (t^* \otimes t^*) \circ c_B$. Wir bekommen also folgende

Definition 15. Sind (A, c_A, u_A, i_A) und (B, c_B, u_B, i_B) Hopfalgebren über k, so heißt ein k-Algebrenhomomorphismus $\varphi\colon B \longrightarrow A$ ein *Morphismus von Hopfalgebren* über k, falls $c_A \circ \varphi = (\varphi \otimes \varphi) \circ c_B$. Wir schreiben k-**Hopfalg** für die Kategorie der *endlich erzeugten* Hopfalgebren über k mit Morphismen von Hopfalgebren.

Lemma 16. *Ist $\varphi\colon B \longrightarrow A$ ein Morphismus von Hopfalgebren über k, so kommutieren*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dash, "u_A"] \arrow[d, dash, "\varphi"'] & k \arrow[d, equal] \\ B \arrow[r, dash, "u_B"'] & k \end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dash, "i_A"] \arrow[d, dash, "\varphi"'] & A \arrow[d, dash, "\varphi"] \\ B \arrow[r, dash, "i_B"'] & B. \end{tikzcd}$$

Beweis. Die Aussage folgt durch Übersetzen in die Welt der k-Gruppenfunktoren und mit den Rechenregeln $\alpha(1) = 1$ und $\alpha(g^{-1}) = \alpha(g)^{-1}$ für jeden Gruppenhomomorphismus $\alpha\colon \Gamma \longrightarrow \Gamma'$. $\square$

Theorem 17. *Folgenden Zuordnungen definieren eine Anti-Äquivalenz (oder Dualität) von Kategorien:*

$$k\text{-}\boldsymbol{Grp} \equiv k\text{-}\boldsymbol{Hopfalg}$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, mapsto] \arrow[d, dash, "a"'] & k[G] \arrow[d, dash, "a^*"] \\ H \arrow[r, mapsto] & k[H] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G^A \arrow[d, dash, "\varphi^*"'] & A \arrow[l, mapsto] \arrow[d, dash, "\varphi"] \\ G^B & B \arrow[l, mapsto] \end{tikzcd}$$

wobei $\varphi_R^*\colon G^A(R) \longrightarrow G^B(R)$ *für* $R \in k$-***Alg*** *durch* $\varphi_R^*(g) = g \circ \varphi$ *für jedes* $g \in G^A(R) = \mathrm{Hom}_k(A, R)$ *definiert ist.*

Beweis. Es ist klar, dass obige Zuordnungen wohldefiniert sind und kontravariante Funktoren definieren. Es bleibt zu zeigen, dass $k[G^A] \cong A$ natürlich in A und $G^{k[G]} \cong G$ natürlich in G gilt. Dies folgt im Wesentlichen aus Proposition 6 und Lemma 7 und der Konstruktion der Kategorie k-**Hopfalg**. $\square$

Übung. Beweise folgende Aussagen über Hopfalgebren (A, c, u, i):

(i) $i \circ i = \mathrm{id}_A$.

(ii) $c \circ i = \mathrm{switch} \circ (i \otimes i) \circ c$, wobei $\mathrm{switch}(a \otimes b) = b \otimes a$.

(iii) $u \circ i = u$.

(iv) Gilt $(\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_A) \circ c = \mathrm{incl} \circ u$, mit $\mathrm{incl}\colon k \longrightarrow A$, so auch $\mathrm{switch} \circ c = c$.

Lemma 18. *Sei* (A, c_A, u_A, i_A) *eine Hopfalgebra über* k, $G = G^A$. *Dann gilt*

(i) *Die Elemente* id_A *und* i_A *von* $G(A)$ *sind invers zueinander.*

(ii) *Seien* $\iota_1, \iota_2\colon A \longrightarrow A \otimes_k A$ *mit* $\iota_1(a) = a \otimes 1$ *und* $\iota_2(a) = 1 \otimes a$. *Dann ist* $\iota_1 \cdot \iota_2 = c_A$ *in* $G(A \otimes_k A)$.

Beweis. Es ist $i \cdot \mathrm{id}_A = (i, \mathrm{id}_A) \circ c_A = \mathrm{incl} \circ u_A = 1_{G(A)}$ und $\iota_1 \cdot \iota_2 = (\iota_1, \iota_2) \circ c_A = c_A$, denn $(\iota_1, \iota_2) = \mathrm{id}_{A \otimes_k A}$. $\square$

Beispiel. Für folgende algebraische k-Gruppen sieht die Hopfalgebrenstruktur wie folgt aus:

(i) Für $\mathbb{G}_m$ ist $k[\mathbb{G}_m] \cong k[X, X^{-1}]$ und $u\colon k[X, X^{-1}] \longrightarrow k$ entspricht $1 \in \mathbb{G}_m(k)$, ist also gegeben durch $u(X) = 1$. Die Koinverse $i\colon k[X, X^{-1}] \longrightarrow k[X, X^{-1}]$ ist invers zu $\mathrm{id}_{k[X,X^{-1}]}$ in $\mathbb{G}_m(k[X, X^{-1}])$, ist also gegeben durch $i(X) = X^{-1}$.
Die Komultiplikation $c\colon k[X, X^{-1}] \longrightarrow k[X, X^{-1}] \otimes_k k[X, X^{-1}]$ entspricht genau dem Produkt $\iota_1 \cdot \iota_2 \in \mathbb{G}_m(k[X, X^{-1}] \otimes_k k[X, X^{-1}])$, ist also gegeben durch $c(X) = \iota_1(X)\iota_2(X) = X \otimes X$.

(ii) Für $\mathbb{G}_a$ ist $k[\mathbb{G}_a] \cong k[X]$ und $u\colon k[X] \longrightarrow k$ ist gegeben durch $u(X) = 0$, die Koinverse $i\colon k[X] \longrightarrow k[X]$ ist gegeben durch $i(X) = -X$ und die Komultiplikation $c\colon k[X] \longrightarrow k[X] \otimes k[X]$ ist gegeben durch $c(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$.

(iii) Für GL_n ist $k[\mathrm{GL}_n] \cong k[X_{ij}, \det^{-1}]$ und man hat

$$\begin{aligned} u\colon k[X_{ij}, \det{}^{-1}] &\longrightarrow k, X_{ij} \longmapsto \delta_{ij} \\ i\colon k[X_{ij}, \det{}^{-1}] &\longrightarrow k[X_{ij}, \det{}^{-1}], X_{ij} \longmapsto \frac{1}{\det}(-1)^{i+j} D_{ij} \\ c\colon k[X_{ij}, \det{}^{-1}] &\longrightarrow k[X_{ij}, \det{}^{-1}] \otimes_k k[X_{ij}, \det{}^{-1}], X_{ij} \longmapsto \sum_{\ell=1}^{n} X_{i\ell} \otimes X_{\ell j}, \end{aligned}$$

wobei D_{ij} die Determinante der aus $(X_{\ell m})$ durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte enstehenden Matrix ist.

(iv) Für $G^{(\alpha)}$ ist $k[G^{(\alpha)}] \cong k[U, V, (U^2 - V^2\alpha)^{-1}]$ und entlang dieses Isomorphismus hat man

$$\begin{aligned} u\colon k[G^{(\alpha)}] &\longrightarrow k, (U, V) \longmapsto (1, 0) \\ i\colon k[G^{(\alpha)}] &\longrightarrow k[G^{(\alpha)}], (U, V) \longmapsto \left(\frac{U}{U^2 - V^2\alpha}, \frac{-V}{U^2 - V^2\alpha}\right) \\ c\colon k[G^{(\alpha)}] &\longrightarrow k[G^{(\alpha)}] \otimes_k k[G^{(\alpha)}], (U, V) \longmapsto (U \otimes U + \alpha V \otimes V, U \otimes V + V \otimes U). \end{aligned}$$

Für den Rest dieses Abschnitts sei k immer ein Körper. Dann ist für jeden Untermodul U eines k-Moduls M die induzierte k-lineare Abbildung $U \otimes_k U \longrightarrow M \otimes_k M$ injektiv.

Definition 19. Sei A eine Hopfalgebra über k und B eine Unteralgebra. Dann heißt B eine *Hopfunteralgebra* von A, falls $i_A(B) \subset B$ und $c_A(B) \subset B \otimes_k B$. Eine Hopfunteralgebra ist wiederum eine Hopfalgebra mit Homomorphismen $c_B\colon B \longrightarrow B \otimes_k B$, $u_B\colon B \longrightarrow k$ und $i_B\colon B \longrightarrow B$, die man durch Einschränkung von c_A, u_A und i_A erhält, und die Inklusion $B \hookrightarrow A$ wird ein Hopfalgebrenhomomorphismus.

Beispiel. Sei $\varphi\colon A' \longrightarrow A$ ein Hopfalgebrenhomomorphismus. Dann ist $B = \varphi(A')$ eine Hopfunteralgebra von A.

Beweis. Zuerst einmal ist $\mathrm{im}(\varphi)$ eine k-Unteralgebra. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, dash, "\varphi"] \arrow[d, dash, "i_{A'}"'] & A \arrow[d, dash, "i_A"] \\ A' \arrow[r, dash, "\varphi"'] & A \end{tikzcd}$$

ist kommutativ, also ist $i_A(\varphi(A')) = \varphi(i_{A'}(A')) \subset \varphi(A')$. Genauso kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, dash, "\varphi"] \arrow[d, dash, "c_{A'}"'] & A \arrow[d, dash, "c_A"] \\ A' \otimes_K A' \arrow[r, dash, "\varphi\otimes\varphi"'] & A \otimes_k A, \end{tikzcd}$$

also ist $c_A(\varphi(A')) = \varphi \otimes \varphi(c_{A'}(A')) \subset \varphi \otimes \varphi(A' \otimes_k A') = \varphi(A') \otimes_k \varphi(A')$. □

Definition 20. Sei $a\colon G \longrightarrow H$ ein Morphismus von algebraischen k-Gruppen. Dann nennen wir die algebraische k-Gruppe H', die dargestellt wird durch das Bild von $a^*\colon k[H] \longrightarrow k[G]$, das *Bild von a* und schreiben $H' = \mathrm{im}\, a$. Beachte, dass $\mathrm{im}\, a$ tatsächlich eine algebraische k-Gruppe ist, da das Bild von a^* endlich erzeugt ist.

Das Bild von $a\colon G \longrightarrow H$ ist (isomorph zu) einer Untergruppe von H, denn der Hopfalgebrenhomomorphismus $k[H] \twoheadrightarrow k[H']$ ist surjektiv, und $a\colon G \longrightarrow H$ faktorisiert eindeutig als $G \longrightarrow \operatorname{im} a \hookrightarrow H$, wobei $k[\operatorname{im} a] \hookrightarrow k[G]$ injektiv ist. Man sagt, der Morphismus $G \twoheadrightarrow \operatorname{im} a$ ist *surjektiv*, mehr dazu später.

Wir möchten herausfinden, unter welchen Bedingungen für ein Ideal I einer Hopfalgebra A der Quotient A/I eine von A induzierte Hopfalgebrastruktur trägt.

(i) Die Koeinheit $u\colon A \longrightarrow k$ soll durch A/I faktorisieren, d.h. $\ker u \supset I$.

(ii) Die Koinverse $i\colon A \longrightarrow A$ soll eine Koinverse für A/I induzieren, d.h. die Komposition $A \xrightarrow{i} A \longrightarrow A/I$ soll durch A/I faktorisieren. Es soll also $i(I) \subset I$ gelten.

(iii) Die Komultiplikation $c\colon A \longrightarrow A \otimes_k A$ soll eine Komultiplikation für A/I induzieren, d.h. die Komposition $A \xrightarrow{c} A \otimes_k A \longrightarrow A/I \otimes_k A/I$ soll durch A/I faktorisieren. Es soll also $c(I) \subset \ker \pi \otimes \pi = A \otimes I + I \otimes A$ gelten.

Definition 21. Sei A eine Hopfalgebra über k. Dann heißt ein Ideal I von A ein *Hopf-Ideal*, falls $I \subset \ker u$, $i(I) \subset I$ und $c(I) \subset I \otimes A + A \otimes I$.

Ist I ein Hopf-Ideal von A, so trägt A/I eine von A induzierte Hopfalgebrenstruktur und die Projektion $A \longrightarrow A/I$ ist ein Morphismus von Hopfalgebren.

Lemma 22. *Sei $\varphi\colon B \longrightarrow A$ ein Morphismus von Hopfalgebren. Dann ist $I = \ker \varphi$ ein Hopf-Ideal von B und φ induziert einen Isomorphismus $\overline{\varphi}\colon B/\ker \varphi \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} \varphi$.*

Beweis. Man hat ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "u_B"'] & A \arrow[d, "u_A"] \\ k \arrow[r, equal] & k, \end{tikzcd}$$

woraus folgt, dass $\ker \varphi \subset \ker u_B$. Ebenso hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i_B"'] & A \arrow[d, "i_A"] \\ B \arrow[r, "\varphi"'] & A, \end{tikzcd}$$

woraus folgt, dass $i_B(\ker\varphi) \subset \ker\varphi$, und ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, dash, "\varphi"] \arrow[d, dash, "c_B"'] & A \arrow[d, dash, "c_A"] \\
B \otimes_k B \arrow[r, dash, "\varphi\otimes\varphi"] \arrow[dr, dash] & A \otimes_k A, \arrow[dl, dash] \\
& \varphi(B) \otimes_k \varphi(B) &
\end{tikzcd}$$

woraus folgt, dass $c_B(\ker\varphi) \subset \ker\varphi\otimes\varphi = \ker\varphi\otimes B + B\otimes\ker\varphi$. Daher ist $\ker\varphi$ ein Hopf-Ideal. Der induzierte k-Algebrenisomorphismus $\overline{\varphi}\colon B/\ker\varphi \longrightarrow \operatorname{im}\varphi$ ist ein (Iso-)Morphismus von Hopfalgebren, denn das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "c_B"'] & B/\ker\varphi \arrow[r, dash, "\overline{\varphi}"] \arrow[d, dash, "c_{B/\ker\varphi}"] & \operatorname{im}\varphi \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "c_{\operatorname{im}\varphi}"'] & A \arrow[d, dash, "c_A"] \\
B\otimes_k B \arrow[r, dash] & B/\ker\varphi \otimes_k B/\ker\varphi \arrow[r, dash, "\overline{\varphi}\otimes\overline{\varphi}"'] & \operatorname{im}\varphi\otimes_k\operatorname{im}\varphi \arrow[r, dash] & A\otimes_k A,
\end{tikzcd}$$

kommutiert, da das linke, das rechte und das äußere Rechteck kommutieren und der Homomorphismus $B \twoheadrightarrow B/\ker\varphi$ surjektiv und $\operatorname{im}\varphi\otimes_k\operatorname{im}\varphi \hookrightarrow A\otimes_k A$ injektiv ist. $\square$

Proposition 23. *Sei G eine algebraische k-Gruppe.*

(i) *Für jede Untergruppe H von G mit Inklusion $\iota\colon H \hookrightarrow G$ ist $I(H) := \ker\iota^* \subset k[G]$ ein Hopf-Ideal. Es ist also*

$$I(H) = \{t \in k[G] = \operatorname{Nat}(V\circ G, \mathbb{A}^1_k)\colon t_R(h) = 0 \text{ für alle } h \in H(R)\}.$$

(ii) *Für jedes Hopf-Ideal I von $k[G]$ ist der Funktor*

$$\begin{array}{rl}
G(I)\colon k\text{-}\boldsymbol{Alg} & \text{——} \ \mathbf{Grp} \\
R & \longmapsto \{g \in G(R)\colon t_R(g) = 0 \text{ für alle } t \in I\}
\end{array}$$

eine Untergruppe von G, dargestellt durch $k[G]/I$.

(iii) *Die Zuordnungen*

$$\{\textit{Untergruppen von } G\} \;=\!=\!=\; \{\textit{Hopf-Ideale von } k[G]\}$$

$$\begin{array}{rcl}
H & \longmapsto & I(H) \\
G(I) & \longleftarrow\!\!\shortmid & I
\end{array}$$

sind invers zueinander, insbesondere bijektiv.

Beweis. Teil (i) folgt aus Lemma 22. Für Teil (ii) ist $k[G]/I$ eine Hopfalgebra und $k[G] \longrightarrow k[G]/I$ ein Hopfalgebrenhomomorphismus. Ausserdem ist $G(I)$ durch $k[G]/I$ dargestellt ist. Nämlich gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_k(k[G]/I, R) &\cong \{g \in G(R) \colon t_R(g) = \alpha_R(g)(t) = 0 \text{ für } t \in I\} = \\ &= G(I)(R),\end{aligned}$$

wobei α_R der kanonische Isomorphismus $G(R) \longrightarrow \operatorname{Hom}_k(k[G], R)$ sei, und diese Bijektion ist natürlich in R. Also ist $G(I)$ eine algebraische k-Gruppe. Unter dem daraus resultierenden Isomorphismus $k[G(I)] \cong k[G]/I$ entspricht der von der Inklusion $G(I) \longrightarrow G$ induzierte k-Algebren Homomorphismus $k[G] \longrightarrow k[G(I)]$ der Projektion $k[G] \longrightarrow k[G]/I$, welche surjektiv ist. Also ist $G(I)$ eine Untergruppe von G.

In Teil (iii) entspricht $G(I) \hookrightarrow G$ dem k-Algebrenhomomorphismus $k[G] \twoheadrightarrow k[G]/I$ mit Kern I. Also ist $I(G(I)) = I$. Umgekehrt ist

$$\begin{aligned}G(I(H))(R) &= \{g \in G(R) \colon \alpha_R(g)(t) = t_R(g) = 0 \text{ für alle } t \in I(H)\} = \\ &= \{g \in G(R) \colon \ker \alpha_R(g) \supset I(H) = \ker \iota^*\} = \\ &= \{g \in G(R) \colon \alpha_R(g) \text{ faktorisiert durch } \iota^*\} = H(R),\end{aligned}$$

denn es gibt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
G(R) \arrow[r, dash, "(\alpha_G)_R"] \arrow[d, dash] & \operatorname{Hom}_k(k[G], R) \arrow[d, dash, "h \longmapsto h \circ \iota^*"] \\
H(R) \arrow[r, dash, "(\alpha_H)_R"'] & \operatorname{Hom}_k(k[H], R).
\end{tikzcd}$$

□

Beispiel. Für eine algebraische k-Gruppe G ist $I_G = \ker(u \colon k[G] \longrightarrow k)$ ein Hopf-Ideal und entspricht der trivialen Untergruppe von G. Man nennt I_G das *Augmentationsideal* von $k[G]$.

Ist $a \colon H \longrightarrow G$ ein Morphismus von algebraischen k-Gruppen, so entspricht das Hopf-Ideal $\ker(a^* \colon k[G] \longrightarrow k[H]) \subset k[G]$ dem Bild $\operatorname{im} a$ von $a \colon H \longrightarrow G$.

Ist $I = I(H')$ das einer Untergruppe $H' \subset G$ entsprechende Hopf-Ideal und ist $a \colon H \longrightarrow G$ ein Morphismus von algebraischen k-Gruppen, so ist $a^*(I)k[H] \subset k[H]$ das Hopf-Ideal, welches dem Urbild $a^{-1}(H') \subset H$ entspricht.

I.4. Restriktion und Weil-Restriktion

Jetzt sei k wieder ein beliebiger Ring und $k \longrightarrow k'$ ein Ringhomomorphismus. Ziel der Restriktion ist ein Funktor k-**Grp** $\longrightarrow$ k'-**Grp** und der Korestriktion ein Funktor k'-**Grp** $\longrightarrow$ k-**Grp**.

Definition 24. Sei G eine k-Gruppe und $k \longrightarrow k'$ ein Ringhomomorphismus. Dann heißt der k'-Gruppenfunktor

$$\begin{array}{rcl} G_{k'}\colon k'\text{-}\mathbf{Alg} & \longrightarrow & \mathbf{Grp}, \\ R' & \longmapsto & G(R') \\ f' \Big\downarrow & & \Big\downarrow G(f') \\ S' & \longmapsto & G(S'), \end{array}$$

wobei R' mittels $k \longrightarrow k' \longrightarrow R'$ als k-Algebra betrachtet wird, die *Restriktion* von G bezüglich $k \longrightarrow k'$.

Lemma 25. *Ist G eine algebraische k-Gruppe, so ist $G_{k'}$ eine algebraische k'-Gruppe, dargestellt durch $k[G] \otimes_k k'$.*

Beweis. Es gibt eine natürliche Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{k'\text{-}\mathbf{Alg}}(k[G] \otimes_k k', R') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[G], R') = G_{k'}(R')$$

wobei R' mittels $k \longrightarrow k' \longrightarrow R'$ als k-Algebra betrachtet wird. Außerdem ist $k[G] \otimes_k k'$ endlich erzeugt über k', wenn $k[G]$ endlich erzeugt über k ist. $\square$

Beispiel. Sei $\mathbb{G}_m$ die multiplikative Gruppe über $\mathbb{Z}$, k ein Ring und $\alpha \in k$. Wir hatten eine k-Gruppe $N^{(\alpha)}$ mit

$$N^{(\alpha)}(R) = \{u + vx \in R \oplus Rx\colon u^2 - v^2\alpha = 1\}$$

definiert. Dann sind für jeden Ringhomomorphismus $k \longrightarrow k'$ mit $2, \alpha \in (k')^\times$, so dass α in k' ein Quadrat ist, die algebraischen k'-Gruppen $\mathbb{G}_{m,k'}$ und $N^{(\alpha)}_{k'}$ isomorph. Dies zeigen wir wie folgt:

Sei $\lambda \in k'$ mit $\lambda^2 = \alpha \in (k')^\times$. Dann sind für jede k'-Algebra R die Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} R^\times = \mathbb{G}_{m,k'}(R) & \Longleftrightarrow & N^{(\alpha)}_{k'}(R) = N^{(\alpha)}(R) \\ r & \longmapsto & \frac{r+r^{-1}}{2} + \frac{r-r^{-1}}{2\lambda}x \\ u + v\lambda & \longleftarrow\!\shortmid & u + vx \end{array}$$

wohldefinierte Gruppenhomomorphismen, die invers zueinander und natürlich in R sind. Es folgt, dass $\mathbb{G}_{m,k'} \cong N^{(\alpha)}_{k'}$.

Speziell heißt für $k = \mathbb{R}$ und $\alpha = -1$ aus naheliegenden Gründen $N^{(\alpha)}$ die *Kreisgruppe*. Über $\mathbb{C}$ werden also $N^{(\alpha)}(\mathbb{R}) = S^1$ und $\mathbb{R}^\times$ isomorph. Aber über $\mathbb{R}$ sind natürlich S^1 und $\mathbb{R}^\times$ nicht isomorph.

Definition 26. Sei G' ein k'-Gruppenfunktor und $k \longrightarrow k'$ ein Ringhomomorphismus. Dann heißt der k-Gruppenfunktor

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] \mathrm{R}_{k'|k}(G')\colon k\text{-}\mathbf{Alg} \arrow[r, dash] & \mathbf{Grp}, \\ R \arrow[r, mapsto] \arrow[d, dash, "f"'] & G'(R \otimes_k k') \arrow[d, dash, "G'(f \otimes \mathrm{id}_{k'})"] \\ S \arrow[r, mapsto] & G'(S \otimes_k k') \end{tikzcd}$$

die *Korestriktion* oder *Weil-Restriktion* von G' bezüglich dem Ringhomomorphismus $k \longrightarrow k'$.

Beispiel. Sei $G' = \mathbb{G}_m$ über $k' = k[X]/(X^2 - \alpha) = k \oplus kx$ für einen Ring k und ein $\alpha \in k$. Dann ist $R \otimes_k k' \cong R \oplus Rx$ bezüglich des kanonischen Ringhomomorphismus $k \longrightarrow k'$ und $\mathrm{R}_{k'|k}(G')$ ist isomorph zu $G^{(\alpha)}$ aus Abschnitt I.1.

Lemma 27. *Sei G' eine algebraische k'-Gruppe und $k \longrightarrow k'$ ein Ringhomomorphismus. Ist k' als k-Modul frei von endlichem Rang, so ist $\mathrm{R}_{k'|k}(G')$ eine algebraische k-Gruppe.*

Beweis. Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von k' als k-Modul. Wähle ein Ideal I mit einem Isomorphismus $k'[G'] \cong k'[X_1, \ldots, X_m]/I$. Seien $Y_i^{(j)}$ unabhängige Variablen über k für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$. Für $p \in I$ substituiere X_i mit $\sum_j Y_i^{(j)} e_j$ und schreibe

$$p(X_1, \ldots, X_m) = \sum_{\ell=1}^{n} p^{(\ell)} e_\ell$$

mit $p^{(1)}, \ldots, p^{(n)} \in k[Y_i^{(j)}]$. Sei nun R eine k-Algebra. Da k' frei als k-Modul ist, ist $R \otimes_k k'$ frei als R-Modul mit Basis $1 \otimes e_1, \ldots, 1 \otimes e_n$. Wir schreiben $\overline{e}_j = 1 \otimes e_j$. Für $(x_1, \ldots, x_m) \in (R \otimes_k k')^m$ ist

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} y_i^{(j)} \overline{e}_j$$

mit $y_i^{(j)} \in R$ und mit $p \in I$ ist genau dann

$$p(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{\ell=1}^{n} p^{(\ell)}(x_1, \ldots, x_m) \overline{e}_\ell = 0,$$

wenn $p^{(\ell)}(x_1, \ldots, x_m) = 0$ für alle ℓ. Daher ist

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_{k'|k}(G')(R) = G'(R \otimes_k k') &\cong \mathrm{Hom}_{k'}(k'[G'], R \otimes_k k') \cong \\ &\cong \{(x_1, \ldots, x_m) \in (R \otimes_k k')^m \colon p(x_1, \ldots, x_m) = 0 \text{ für alle } p \in I\} \cong \\ &\cong \{y \in (R \otimes_k k')^m \colon p^{(\ell)}(y) = 0 \text{ für alle } p \in I \text{ und } 1 \leq \ell \leq n\} \cong \\ &\cong \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}\Big(k[Y_i^{(j)}]/(p^{(\ell)} \colon p \in I, 1 \leq \ell \leq n), R\Big). \end{aligned}$$

Also ist $\mathrm{R}_{k'|k}(G')$ dargestellt durch eine endlich erzeugte k-Algebra, d.h. $\mathrm{R}_{k'|k}(G')$ ist eine algebraische k-Gruppe. $\square$

Proposition 28. *Sei $k \longrightarrow k'$ ein Ringhomomorphismus, so dass k' als k-Modul frei von endlichem Rang ist. Sei H eine algebraische k-Gruppe und G' eine algebraische k'-Gruppe. Dann existiert eine kanonische Bijektion*

$$\mathrm{Hom}(H, \mathrm{R}_{k'|k}(G')) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(H_{k'}, G').$$

Beweis. Sei $a\colon H \longrightarrow \mathrm{R}_{k'|k}(G')$ ein Morphismus von algebraischen k-Gruppen. Dann definieren wir einen Morphismus $a'\colon H_{k'} \longrightarrow G'$ von algebraischen k'-Gruppen wie folgt. Für jede k'-Algebra R' definieren wir einen Gruppenhomomorphismus

$$a'_{R'}\colon H_{k'}(R') = H(R') \xrightarrow{a_{R'}} \mathrm{R}_{k'|k}(G')(R') \xrightarrow{G'(m)} G'(R')$$

mit dem k'-Algebrenhomomorphismus $m\colon R' \otimes_k k' \longrightarrow R'$ mit $m(r' \otimes \lambda) = r'\lambda$. Dies definiert eine natürliche Transformation $H_{k'} \longrightarrow G'$, denn a ist eine natürliche Transformation und

$$\begin{tikzcd} R' \otimes_k k' \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f' \otimes \mathrm{id}_{k'}"'] & R' \arrow[d, "f'"] \\ S' \otimes_k k' \arrow[r, "m"'] & S' \end{tikzcd}$$

kommutiert, wenn f' ein Homomorphismus von k'-Algebren ist. Dies definiert die Abbildung $\mathrm{Hom}(H, \mathrm{R}_{k'|k}(G')) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_{k'}, G')$.

Umgekehrt sei $b'\colon H_{k'} \longrightarrow G'$ ein Morphismus von algebraischen k'-Gruppen. Definiere für jede k-Algebra R einen Gruppenhomomorphismus

$$b_R\colon H(R) \xrightarrow{H(\iota)} H(R \otimes_k k') \xrightarrow{b'_{R\otimes_k k'}} G'(R \otimes_k k') = \mathrm{R}_{k'|k}(G')(R)$$

mit der natürlichen Inklusion $\iota\colon R \longrightarrow R \otimes_k k'$ von R in $R \otimes_k k'$. Dies definiert einen Morphismus $H \longrightarrow \mathrm{R}_{k'|k}(G')$ von algebraischen k-Gruppen und wir erhalten eine Abbildung $\mathrm{Hom}(H_{k'}, G') \longrightarrow \mathrm{Hom}(H, \mathrm{R}_{k'|k}(G'))$.

Es bleibt nachzurechnen, dass diese beiden Abbildungen invers zueinander sind. Wir bemerken zuerst, dass für jede k'-Algebra R' der Homomorphismus

$$m \circ \iota\colon R' \longrightarrow R' \otimes_k k' \longrightarrow R'$$

die Identität $\mathrm{id}_{R'}$ ist. Wird $b'\colon H_{k'} \longrightarrow G'$ dem Morphismus $a\colon H \longrightarrow \mathrm{R}_{k'|k}(G')$ zugeordnet, ist in obiger Notation zu zeigen, dass $b' = a'$. Es gilt aber

$$a'_{R'} = G'(m) \circ a_{R'} = G'(m) \circ b'_{R\otimes_k k'} \circ H(\iota) = b'_{R'} \circ H(m) \circ H(\iota) = b'_{R'}$$

wegen der Natürlichkeit von b'.

Umgekehrt sei $a\colon H \longrightarrow \mathrm{R}_{k'|k}(G')$ und a' werde $b\colon H \longrightarrow \mathrm{R}_{k'|k}(G')$ zugeordnet. Es ist zu zeigen, dass $a = b$. Es gilt

$$b_R = a'_{R\otimes_k k'} \circ H(\iota) = G'(m) \circ a_{R\otimes_k k'} \circ H(\iota) = G'(m) \circ G'(\iota) \circ a_R = a_R$$

wegen der Natürlichkeit von a. □

Bemerkung. In kategorieller Sprache bedeutet Proposition 28, dass die Funktoren $(-)_{k'}\colon k$-**Grp** $\longrightarrow k'$-**Grp** und $\mathrm{R}_{k'|k}\colon k'$-**Grp** $\longrightarrow k$-**Grp** zueinander adjungiert sind.

Übung.

(i) Seien $k \longrightarrow k' \longrightarrow k''$ Ringhomomorphismen und G'' ein k''-Gruppenfunktor. Dann ist $\mathrm{R}_{k''|k}(G'') \cong \mathrm{R}_{k'|k} \circ \mathrm{R}_{k''|k'}(G'')$.

(ii) Seien $k \longrightarrow k'$ und $k \longrightarrow K$ Ringhomomorphismen und G' ein k'-Gruppenfunktor. Dann ist $(\mathrm{R}_{k'|k}(G'))_K \cong \mathrm{R}_{K\otimes_k k'|K}(G'_{K\otimes_k k'})$.

II. Elementare Eigenschaften und Konstruktionen

II.1. Kommutativität und Normalität

Definition 29. Sei G ein k–Gruppenfunktor. Wir nennen G *kommutativ*, wenn alle Gruppen $G(R)$ mit $R \in k\text{-}\mathbf{Alg}$ kommutativ sind.

Lemma 30. *Eine algebraische k–Gruppe G ist genau dann kommutativ, wenn $k[G]$ kokommutativ ist, d.h.* $\mathrm{switch} \circ c = c$ *in $k[G]$ gilt.*

Beweis. Es entspricht $\mathrm{switch} \circ c\colon k[G] \longrightarrow k[G] \otimes_k k[G]$ der natürlichen Transformation $(V \circ G) \times (V \circ G) \longrightarrow V \circ G$ mit $(g, h) \longmapsto hg$. Also gilt $\mathrm{switch} \circ c = c$ genau dann, wenn für alle $R \in k\text{-}\mathbf{Alg}$ und $g, h \in G(R)$ gilt $gh = hg$, d.h. G kommutativ ist. $\square$

Definition 31. Sei G ein k–Gruppenfunktor und H ein Untergruppenfunktor. Dann heißt H *zentral* (bzw. *normal*) in G, falls $H(R)$ zentral (bzw. normal) in $G(R)$ ist für alle $R \in k\text{-}\mathbf{Alg}$.

Ein zentraler Untergruppenfunktor ist auch normal. Der Kern $\ker a$ eines Morphismus $a\colon G \longrightarrow H$ von k-Gruppenfunktoren ist ein normaler Untergruppenfunktor.

Wir führen folgende Notation ein. Ist $f\colon R \longrightarrow S$ ein k–Algebrenhomomorphismus und G ein k–Gruppenfunktor, so schreiben wir verkürzend g_S für $G(f)(g)$, wenn $g \in G(R)$.

Definition 32. Sei G ein k–Gruppenfunktor und H ein Untergruppenfunktor von G. Wir definieren Untergruppenfunktoren

$$\begin{aligned} \mathrm{Z}_G(H)\colon k\text{-}\mathbf{Alg} &\longrightarrow \mathbf{Grp}, \\ R &\longmapsto \{g \in G(R)\colon \forall S \in R\text{-}\mathbf{Alg}\, \forall h \in H(S).\ g_S h = h g_S\} \end{aligned}$$

den *Zentralisator* von H in G, und

$$\begin{aligned} \mathrm{N}_G(H)\colon k\text{-}\mathbf{Alg} &\longrightarrow \mathbf{Grp}, \\ R &\longmapsto \{g \in G(R)\colon \forall S \in R\text{-}\mathbf{Alg}\, \forall h \in H(S).\ g_S h g_S^{-1} \in H(S)\} \end{aligned}$$

den *Normalisator* von H in G.

Speziell nennen wir $\mathrm{Z}(G) \coloneqq \mathrm{Z}_G(G)$ das *Zentrum* von G. Es ist $\mathrm{Z}_G(H) \subset \mathrm{N}_G(H)$. Beachte, dass $\mathrm{Z}_G(H)(R)$ und $\mathrm{N}_G(H)(R)$ tatsächlich Untergruppen von $G(R)$ sind und dass für jeden k–Algebrenhomomorphismus $f\colon R \longrightarrow S$ gilt $G(f)(\mathrm{Z}_G(H)(R)) \subset \mathrm{Z}_G(H)(S)$ und $G(f)(\mathrm{N}_G(H)(R)) \subset \mathrm{N}_G(H)(S)$. Daher sind $\mathrm{Z}_G(H)$ und $\mathrm{N}_G(H)$ tatsächlich k–Gruppenfunktoren.

Lemma 33. *Sei H ein Untergruppenfunktor eines k–Gruppenfunktors G.*

(i) *Der Untergruppenfunktor H ist genau dann zentral in G, wenn $H \subset \mathrm{Z}(G)$, und genau dann normal in G, wenn $G = \mathrm{N}_G(H)$.*
(ii) *Der k–Gruppenfunktor G ist genau dann kommutativ, wenn $\mathrm{Z}(G) = G$.*
(iii) *Für jeden Homomorphismus $k \longrightarrow k'$ gilt $\mathrm{Z}_G(H)_{k'} = \mathrm{Z}_{G_{k'}}(H_{k'})$, $\mathrm{Z}(G)_{k'} = \mathrm{Z}(G_{k'})$ und $\mathrm{N}_G(H)_{k'} = \mathrm{N}_{G_{k'}}(H_{k'})$.*

Beweis. Genau dann ist $H(R) \subset \mathrm{Z}(G)(R)$ für alle $R \in k$-**Alg**, wenn für alle $R \in k$-**Alg** und $S \in R$-**Alg** und alle $g \in G(S)$ und $h \in H(R)$ gilt, dass $h_S g = g h_S$. Insbesondere gilt dann $hg = gh$ für alle $R \in k$-**Alg** und alle $g \in G(R)$ und $h \in H(R)$, d.h. $H(R)$ ist zentral in $G(R)$. Die umgekehrte Implikation gilt auch, d.h. H ist zentral in G genau dann, wenn $H \subset \mathrm{Z}(G)$. Analog folgt die Aussage über $\mathrm{N}_G(H)$ und (ii).

Für (iii) sei R' eine k'–Algebra. Dann ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Z}_G(H)_{k'}(R') &= \mathrm{Z}_G(H)(R') = \\ &= \{g \in G(R') \colon \forall S \in R'\text{-}\mathbf{Alg}\, \forall h \in H(S)\ g_S h = h g_S\} = \\ &= \{g \in G_{k'}(R') \colon \forall S \in R'\text{-}\mathbf{Alg}\, \forall h \in H_{k'}(S)\ g_S h = h g_S\} = \\ &= \mathrm{Z}_{G_{k'}}(H_{k'})(R').\end{aligned}$$

Analog folgen die beiden anderen Gleichungen. □

Ab jetzt sei k wieder ein Körper.

Proposition 34. *Sei G eine algebraische k–Gruppe und H eine Untergruppe. Dann ist der Zentralisator $\mathrm{Z}_G(H)$ eine Untergruppe von G. Insbesondere ist das Zentrum $\mathrm{Z}(G)$ eine Untergruppe.*

Beweis. Sei $A = k[G]$, $B = k[H]$ und $\pi = \iota^* \colon A \twoheadrightarrow B$ mit der Inklusion $\iota \colon H \hookrightarrow G$. Sei $\varphi \colon A \longrightarrow A \otimes_k A$ der k–Algebrenhomomorphismus, welcher der natürlichen Transformation $V \circ G \times V \circ G \longrightarrow V \circ G$ mit $(h, g) \longmapsto g^{-1} h g$ entspricht. Wir zeigen zuerst: Ist $g \in \mathrm{Z}_G(H)(R)$, so kommutiert

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\iota_1 \circ \pi"'] & A \otimes_k A \arrow[d, "\pi \otimes \pi'"] \\ & B \otimes_k A/\ker \alpha_R(g). \end{tikzcd} \qquad (*)$$

Da $\mathrm{id}_B \otimes \overline{\alpha_R(g)} \colon B \otimes_k A/\ker \alpha_R(g) \hookrightarrow B \otimes_k R$ injektiv ist (da k ein Körper ist), genügt es zu zeigen, dass

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\iota_1 \circ \pi"'] & A \otimes_k A \arrow[d, "\pi \otimes \alpha_R(g)"] \\ & B \otimes_k R \end{tikzcd}$$

kommutiert. Es gilt $\pi \otimes \alpha_R(g) = (\iota_1 \circ \pi, \iota_2 \circ \alpha_R(g)) = (\iota_1 \circ \pi, \alpha_S(g_S))$ mit $S \coloneqq B \otimes_k R$. Sei $h \in H(S) \subset G(S)$ mit $\alpha_S(h) = \iota_1 \circ \pi$. Dann folgt aus $g_S^{-1} h g_S = h \in H(S)$ die Beziehung $(\pi \otimes \alpha_R(g)) \circ \varphi = (\alpha_S(h), \alpha_S(g_S)) \circ \varphi = \alpha_S(g_S^{-1} h g_S) = \iota_1 \circ \pi$ und daraus die Kommutativität von $(*)$.

Umgekehrt zeigen wir, dass für ein Ideal $I \subset A$ mit einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\iota_1 \circ \pi"'] & A \otimes_k A \arrow[d, "\pi \otimes \pi'"] \\ & B \otimes_k A/I \end{tikzcd} \tag{$**$}$$

gilt, dass für alle $g \in G(R)$ und $R \in k$-**Alg** bereits $g \in \mathrm{Z}_G(H)(R)$ gilt, wenn $I \subset \ker \alpha_R(g)$. Zum Beweis sei also $g \in G(R)$ mit $I \subset \ker \alpha_R(g)$ und $S \in R$-**Alg**, gegeben durch einen Ringhomomorphismus $\varepsilon\colon R \longrightarrow S$. Weiter sei $h \in H(S)$. Zu zeigen ist dann $g_S^{-1} h g_S = h$ oder äquivalent $(\alpha_S(h), \alpha_S(g_S)) \circ \varphi = \alpha_S(g_S^{-1} h g_S) = \alpha_S(h)$. Sei nun $\beta\colon B \longrightarrow S$ ein k–Algebrenhomomorphismus mit $\alpha_S(h) = \beta \circ \pi$. Wir erhalten folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[ddrr, bend right, "\beta\circ\pi=\alpha_S(h)"'] & A \otimes_k A \arrow[r, "\pi\otimes\pi'"] \arrow[dr, "\pi\otimes\alpha_R(g)"] \arrow[ddr, "{(\beta\circ\pi,\varepsilon\circ\alpha_R(g))= =(\alpha_S(h),\alpha_S(g_S))}"'] & B \otimes_k A/I \arrow[d, "\pi\otimes\overline{\alpha_R(g)}"] \\ & & B \otimes_k R \arrow[d, "{(\beta,\varepsilon)}"] \\ & & S \end{tikzcd}$$

Also folgt die Behauptung.

Ein Ideal I erfüllt genau dann $(**)$, wenn $\pi(a) \otimes 1 - \pi \otimes \mathrm{id}_A \circ \phi(a)$ für alle $a \in A$ in $B \otimes_k I$ liegt. Somit ist der Durchschnitt $\bigcap_j I_j$ von Idealen I_j, welche $(**)$ erfüllen, wieder ein solches, denn $\bigcap_j (B \otimes_k I_j) = B \otimes_k (\bigcap_j I_j)$. Die nichttrivale Inklusion $\subseteq$ in dieser Gleichung folgt daraus, dass sich jedes Element $x \in B \otimes_k A$ bzgl. einer fest gewählten Basis $(b_l)_{l \in L}$ von B als $\sum_l b_l \otimes_k a_l$ mit eindeutig bestimmten $a_l \in A$ schreiben lässt. Selbes gilt mit A ersetzt durch I_j. Liegt $x \in B \otimes_k I_j$, so sind also alle $a_l \in I_j$

Daher erfüllt auch

$$I = \bigcap_{\substack{g \in \mathrm{Z}_G(H)(R) \\ R \in k\text{-}\mathbf{Alg}}} \ker \alpha_R(g)$$

$(**)$ und es folgt

$$\mathrm{Z}_G(H)(R) = \{g \in G(R)\colon I \subset \ker \alpha_R(g)\}.$$

Da $\mathrm{Z}_G(H)$ ein Untergruppenfunktor von G ist, ist I ein Hopfideal von $A = k[G]$, denn $\mathrm{Z}_G(H)$ ist dargestellt durch A/I und die Untergruppenstruktur von $\mathrm{Z}_G(H)$ induziert eine Hopf–Algebrastruktur auf A/I, so dass $A \longrightarrow A/I$ ein Hopf–Algebrenhomomorphismus ist. Also ist $\mathrm{Z}_G(H) = G(I)$ eine Untergruppe von G. □

Bemerkung. Unter den Voraussetzungen von Proposition 34 ist auch $\mathrm{N}_G(H)$ eine Untergruppe von G. Den (deutlich aufwendigeren) Beweis findet man in Milnes Skript in Kapitel V.6 und VI.6.

Beispiel. Es ist $\mathrm{Z}(\mathrm{GL}_n)(R)$ die Untergruppe der Matrizen von der Form rI_n mit der Einheitsmatrix I_n, also $\mathrm{Z}(\mathrm{GL}_n) \cong \mathbb{G}_m$, und $\mathrm{Z}(\mathrm{SL}_n) = \mathrm{Z}(\mathrm{GL}_n) \cap \mathrm{SL}_n$, d.h. $\mathrm{Z}(\mathrm{SL}_n)(R)$ ist die Untergruppe der Matrizen rI_n mit $r^n = 1$, also ist $\mathrm{Z}(\mathrm{SL}_n) \cong \mu_n$, der Gruppe der n–ten Einheitswurzeln.

Sei $D_n \cong \mathbb{G}_m^n$ die Untergruppe von GL_n aller Diagonalmatrizen mit invertierbaren Einträgen. Dann ist $\mathrm{Z}_{\mathrm{GL}_n}(D_n) = D_n$ – man sagt D_n ist *selbstzentralisierend* – und $\mathrm{Z}_{\mathrm{SL}_n}(D_n \cap \mathrm{SL}_n) = D_n \cap \mathrm{SL}_n$.

Beweis. Klar sind $\mathrm{Z}(\mathrm{GL}_n) \supset \mathbb{G}_m$, $\mathrm{Z}(\mathrm{SL}_n) \supset \mathrm{Z}(\mathrm{GL}_n) \cap \mathrm{SL}_n$, $\mathrm{Z}_{\mathrm{GL}_n}(D_n) \supset D_n$ und $\mathrm{Z}_{\mathrm{SL}_n}(D_n \cap \mathrm{SL}_n) \supset D_n \cap \mathrm{SL}_n$. Für $A = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(R)$, $R \in k$-**Alg**, und $E^{(ij)} = (\delta_{il}\delta_{jm})_{lm}$, $E'^{(ij)} = \mathbb{1} + E^{(ij)} \in \mathrm{SL}_n(R)$ für $i \neq j$ gilt $AE'^{(ij)} = E'^{(ij)}A$ genau dann, wenn $AE^{(ij)} = E^{(ij)}A$. Das ist genau dann der Fall, wenn alle Einträge von A außerhalb der Diagonalen verschwinden und $a_{jj} = a_{ii}$ für alle i und j gilt. Das heißt, ist $A \in \mathrm{Z}(\mathrm{GL}_n)(R)$, so ist $A = aI_n$ mit $a \in R^\times$, bzw. ist $A \in \mathrm{Z}(\mathrm{SL}_n)$, so ist $A = aI_n$ mit $a^n = 1$. Daher ist $\mathrm{Z}(\mathrm{GL}_n) = \mathbb{G}_m$ und $\mathrm{Z}(\mathrm{SL}_n) = \mathrm{Z}(\mathrm{GL}_n) \cap \mathrm{SL}_n = \mu_n$.

Ist $R \in k$-**Alg**, $R \neq 0$, so gilt $(a_{ij})D = (t_j a_{ij})$ und $D(a_{ij}) = (t_i a_{ij})$, wenn D die Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $t_1, \dots, t_n$ ist. Finden wir also eine Ringerweiterung $R \subset S$ und $t_1, \dots, t_n \in S^\times$, so dass $t_i - t_j$ für $i \neq j$ ein Nichtnullteiler ist, so folgt dass $\mathrm{Z}_{\mathrm{GL}_n}(D_n)(R) \subset D_n(R)$. Gilt zusätzlich $t_1 \dots t_n = 1$, so folgt $\mathrm{Z}_{\mathrm{SL}_n}(D_n \cap \mathrm{SL}_n)(R) \subset D_n(R)$.

Um solch eine Ringerweiterung zu finden, betrachte $S = R[T_1, \dots, T_n]_{(T_1 \dots T_n)} \supset R$ und setze $t_i = T_i/1$ für $i = 1, \dots, n-1$ und $t_n = T_n/1$ im ersten Fall, bzw. $t_n = 1/(T_1 \dots T_{n-1})$ im zweiten Fall. Man verifiziert leicht, dass in beiden Fällen $t_i - t_j$ für $i \neq j$ ein Nichtnullteiler ist. □

Beispiel. Für $k = \mathbb{F}_2$ ist $\mathrm{Z}_{\mathrm{GL}_2}(D_2)(k) = D_2(k) \neq \mathrm{GL}_2(k) = \mathrm{Z}_{\mathrm{GL}_2(k)}(D_2(k))$ wegen $D_2(k) = \{I_2\}$.

In der Gruppentheorie wird die Kommutatoruntergruppe $[\Gamma, \Gamma]$ einer Gruppe Γ definiert als die von den Kommutatoren $[\gamma_1, \gamma_2] = \gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, erzeugte Untergruppe. Diese Untergruppe ist normal und $\Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ ist der größte abelsche Quotient von Γ. Etwas entsprechendes definieren wir für allgemeine k–Gruppen.

Sei G eine algebraische k–Gruppe und $A = k[G]$. Wir haben k–Algebrenhomomorphismen $\varphi_n \colon A \longrightarrow A^{\otimes 2n}$, $n \geq 1$, welche den natürlichen Transformationen

$$\begin{array}{rcl} (V \circ G)^{2n} & \text{———} & V \circ G \\ (g_1, \ldots, g_{2n}) & \longmapsto & [g_1, g_2] \cdots [g_{2n-1}, g_{2n}] \end{array}$$

entsprechen. Beachte, dass φ_n durch φ_{n+1} faktorisiert, denn $[g_1, g_2] \cdots [g_{2n-1}, g_{2n}] = [g_1, g_2] \cdots [g_{2n-1}, g_{2n}][1, 1]$. Dann gilt mit $I_n \coloneqq \ker \varphi_n$, dass

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots$$

Es gilt $i(I_n) \subset I_n$ für alle n mit der Koinversen i, da

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dash, "\varphi_n"] \arrow[d, dash, "i"'] & A^{\otimes 2n} \arrow[d, dash] & a_1 \otimes \cdots \otimes a_{2n} \arrow[d, mapsto] \\ A \arrow[r, dash, "\varphi_n"'] & A^{\otimes 2n} & a_{2n} \otimes \cdots \otimes a_1 \end{tikzcd}$$

kommutiert. Außerdem ist $I_n \subset \ker u$ mit der Koeinheit u, da

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dash, "\varphi_n"] \arrow[d, dash, "u"'] & A^{\otimes 2n} \arrow[d, dash, "(u,\ldots,u)"] \\ k \arrow[r, dash, "\varphi_n"'] & k \end{tikzcd}$$

kommutiert, und $c(I_{2n}) \subset I_n \otimes A + A \otimes I_n$ für die Komultiplikation c, da

$$\begin{tikzcd} A^{\otimes 2n} \otimes_k A^{\otimes 2n} \arrow[r, dash, "\sim"] \arrow[d, dash, "\varphi \otimes \varphi"'] & A^{\otimes 4n} \arrow[d, dash, "\varphi_{2n}"] \\ A \otimes_k A \arrow[r, dash, "c"'] & A \end{tikzcd}$$

kommutiert und $\ker(\varphi \otimes \varphi) = I_n \otimes A + A \otimes I_n$ gilt. Also erhalten wir mit $I = \bigcap_n I_n$ ein Hopf–Ideal von A.

Definition 35. Wir definieren die *Kommutatoruntergruppe* $[G, G]$ von G als die Untergruppe $G(I) \subset G$, die zu I korrespondiert.

Lemma 36. *Die Kommutatoruntergruppe $[G, G]$ ist die kleinste Untergruppe $G' \subset G$ mit $G'(R) \ni [g_1, g_2]$ für alle $g_1, g_2 \in G(R)$ und $R \in k$-**Alg**.*

Beweis. Identifiziere $\alpha_R\colon G(R) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_k(A,R)$ mit $A = k[G]$. Bemerke, dass für $(g_1,\dots,g_{2n}) \in G(R)^{2n}$ gilt: $\ker([g_1,g_2]\cdots[g_{2n-1},g_{2n}]) \supset I_n$, da

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dash, "\varphi_n"] \arrow[dr, dash, "{[g_1,g_2]\cdots[g_{2n-1},g_{2n}]}"'] & A^{\otimes 2n} \arrow[d, dash, "{(g_1,\dots,g_{2n})}"] \\ & R \end{tikzcd}$$

kommutiert. Mit $R = A^{\otimes 2n}$ und $g_j = \iota_j\colon A \longrightarrow A^{\otimes 2n}$ gilt sogar Gleichheit, denn dann ist $(g_1,\dots,g_{2n}) = \mathrm{id}_R$. Für beliebiges R ist also $[g_1,g_2]\cdots[g_{2n-1},g_{2n}] \in G(I)(R) = [G,G](R)$ und ist G' eine Untergruppe von G, die alle Kommutatoren enthält, so folgt

$$I(G') = \{t \in A\colon g'(t) = 0 \text{ für alle } g' \in G'(R) \text{ und } R \in k\text{-}\mathbf{Alg}\} \subset \bigcap_{n\geq 1} I_n = I,$$

also $G' \supset [G,G]$. $\square$

Korollar 37.

(i) *Die Kommutatoruntergruppe* $[G,G]$ *ist normal.*

(ii) *Der Kern jedes Morphismus* $G \longrightarrow A$ *mit* A *kommutativ enthält* $[G,G]$.

(iii) *Für jede Untergruppe* $H \subset G$ *gilt* $[H,H] \subset [G,G]$.

Beweis. Die Normalität folgt aus der Formel $gng^{-1} = [g,n]n \in [G,G](R)$ für alle $n \in [G,G](R)$ und $g \in G(R)$. Der Kern von $G \longrightarrow A$ ist eine normale Untergruppe, die alle Kommutatoren enthält. Außerdem enthält $[G,G](R)$ natürlich immer alle Kommutatoren von Elementen von $H(R)$. $\square$

Definition 38. Eine algebraische k–Gruppe G heißt *auflösbar*, falls ein $n \geq 1$ existiert mit $D^nG = \{1\}$, wobei $D^1(G) = [G,G]$ und $D^\ell(G) = [D^{\ell-1}(G), D^{\ell-1}(G)]$ für $\ell \geq 2$.

Beispiel.

(i) Jede kommutative algebraische k–Gruppe ist auflösbar, da $D^1(G) = \{1\}$.

(ii) Jede Untergruppe H einer auflösbaren k–Gruppe ist auflösbar, denn $D^iH \subset D^iG$.

(iii) Die algebraische k–Gruppe T_n, bestehend aus allen oberen Dreiecksmatrizen aus GL_n, ist auflösbar, denn definiere die algebraischen k–Gruppen U_n, bestehend aus den Matrizen aus T_n, deren Diagonaleinträge alle 1 sind, und $U_n^{(i)}$, bestehend aus den Matrizen aus T_n mit Diagonaleinträgen 1, deren erste i Nebendiagonalen 0 sind, wobei $U_n^{(0)} = U_n$ und $U_n^{(n-1)} = \{1\}$. Man hat Morphismen $a\colon T_n \longrightarrow \mathbb{G}_m^n$ und $a_i\colon U_n^{(i)} \longrightarrow \mathbb{G}_a^{n-i-1}$ für $0 \leq i \leq n-2$. Dabei bildet a eine Matrix genau auf ihre Diagonaleinträge ab und a_i eine Matrix auf ihre i–te Nebendiagonale. Es folgt $[T_n,T_n] \subset \ker a = U_n$ und $[U_n^{(i)}, U_n^{(i)}] \subset \ker a_i = U_n^{(i+1)}$ für alle i. Insgesamt folgt $D^nT_n \subset U_n^{(n-1)} = \{1\}$.

II.2. Dimension und Glattheit

Definition 39. Sie G eine algebraische k–Gruppe. Definiere $\dim G$ als die Krulldimension $\dim k[G]$.

Lemma 40 (Noethernormalisierung)**.** *Die Dimension* $\dim G$ *ist genau dann* n*, wenn ein injektiver und endlicher Morphismus* $k[X_1, \ldots, X_n] \hookrightarrow k[G]$ *existiert.*

Korollar 41.

(i) *Sind* G *und* G' *algebraische* k*–Gruppen, so ist* $\dim G \times G' = \dim G + \dim G'$.

(ii) *Ist* G *eine algebraische* k*–Gruppe und* $k'|k$ *eine Erweiterung, so ist* $\dim G_{k'} = \dim G$.

Beweis.

(i) Das Tensorprodukt der injektiven endlichen Morphismen $k[X_1, \ldots, X_n] \hookrightarrow k[G]$ und $k[X_1, \ldots, X_m] \hookrightarrow k[G']$,
$$k[X_1, \ldots, Y_{n+m}] \cong k[X_1, \ldots, X_n] \otimes_k k[Y_1, \ldots, Y_m] \hookrightarrow k[G] \otimes_k k[G'] \cong k[G \times G'],$$
ist wiederum injektiv und endlich.

(ii) Ist $k[X_1, \ldots, X_n] \hookrightarrow k[G]$ injektiv und endlich, so auch
$$k'[X_1, \ldots, X_n] \cong k[X_1, \ldots, X_n] \otimes_k k' \hookrightarrow k[G] \otimes_k k' \cong k'[G]. \qquad \square$$

Lemma 42 (Krullscher Höhensatz)**.** *Sei* A *eine nullteilerfreie endlich erzeugte* k*–Algebra.*

(i) *Ist* $\mathfrak{a} \subset A$ *ein echtes Ideal, welches durch* r *Elemente erzeugt ist, so ist die Krulldimension* $\dim A/\mathfrak{a} \geq \dim A - r$.

(ii) *Falls* $\mathfrak{a} \neq 0$ *und* $\mathfrak{a} \neq A$*, so ist* $\dim A/\mathfrak{a} < \dim A$*. Insbesondere ist für* $I = (a)$ *mit* $a \neq 0$*,* $a \notin A^\times$*, die Krulldimension* $\dim A/\mathfrak{a} = \dim A - 1$.

Beispiel.

(i) Es ist $\dim\{1\} = 0$, da $\dim k = 0$.

(ii) Es ist $\dim \mathbb{G}_a = 1$, da $k[\mathbb{G}_a] \cong k[X]$.

(iii) Es ist $\dim \mathrm{GL}_n = n^2$. Das folgt mit $k[\mathrm{GL}_n] \cong k[X_{ij}, Y]/(Y \det(X_{ij}) - 1)$ aus dem Krullschen Höhensatz.

(iv) Es ist $\dim \mathrm{SL}_n = n^2 - 1$, da $k[\mathrm{SL}_n] \cong k[X_{ij}]/(\det(X_{ij}) - 1)$.

(v) Es ist $\dim G^{(\alpha)} = 2$ und $\dim N^{(\alpha)} = 1$, da $k[G^{(\alpha)}] \cong k[U, V, W]/((U^2 - V^2\alpha)W - 1)$ und $k[N^{(\alpha)}] \cong k[U, V]/(U^2 - V^2\alpha - 1)$.

Lemma 43. *Für eine algebraische* k*–Gruppe sind äquivalent:*

(i) $\dim G = 0$.

(ii) $k \longrightarrow k[G]$ *ist endlich.*

(iii) $\dim_k k[G] < \infty$.

(iv) $G(K)$ *ist endlich für jede Körpererweiterung* $K|k$.
(v) $G(K)$ *ist endlich für eine algebraisch abgeschlossene Körpererweiterung* $K|k$.

Beweis. Die Äquivalenz von (i) und (ii) folgt sofort aus der Noethernormalisierung. Die Äquivalenz von (ii) und (iii) ist klar. Zur Implikation (ii)→(iv) bemerke man, dass $G(K) \cong \mathrm{Hom}_k(k[G], K)$, und letztere Menge ist endlich, wenn $k[G]$ endlich über k ist. Die Implikation (iv)→(v) ist klar. Zur Implikation (v)→(i) können wir ohne Einschränkung $k = K$ annehmen, indem wir G durch G_K ersetzen. Dann ist $G(K) \cong \mathrm{Hom}_k(k[G], k)$ in Bijektion mit den maximalen Idealen von $k[G]$, d.h. $k[G]$ hat nur endlich viele maximale Ideale $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ und $\bigcap_i \mathfrak{m}_i = \mathrm{Nil}(k[G])$. Aus dem chinesischen Restsatz folgt dann

$$k[G]_{\mathrm{red}} = k[G]/\mathrm{Nil}(k[G]) \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{r} k[G]/\mathfrak{m}_i \cong k^r,$$

d.h. $\dim G = \dim k[G] = \dim k[G]_{\mathrm{red}} = 0$. □

Definition 44. Wir nennen eine algebraische k–Gruppe *endlich*, falls G die äquivalenten Bedingungen von Lemma 43 erfüllt.

Beispiel. Die Gruppe $\mu_n = \ker(\mathbb{G}_m \xrightarrow{(-)^n} \mathbb{G}_m)$ ist endlich, da $k[\mu_n] \cong k[X]/(X^n - 1)$ als Vektorraum endliche Dimension hat. Alternativ kann man feststellen, dass $\mu_n(K) = \{x \in K^\times : x^n = 1\}$ für jede Körpererweiterung $K|k$ endlich ist.

Definition 45. Eine algebraische k–Gruppe G heißt *glatt*, falls $K[G_K] \cong k[G] \otimes_k K$ für jede Körpererweiterung $K|k$ reduziert ist.

Beispiel. Die Gruppen $\mathbb{G}_a$, $\mathbb{G}_m$, GL_n und SL_n sind glatt, weil die k–Algebren $K[X]$, $K[X, X^{-1}]$, $K[X_{ij}, \det^{-1}]$ und $K[X_{ij}]/(\det(X_{ij}) - 1)$ nullteilerfrei, also insbesondere reduziert, sind.

Die Gruppe μ_n ist genau dann glatt als algebraische Gruppe über k, falls $\mathrm{char}(k) = 0$ oder $\mathrm{char}(k) = p \nmid n$, denn $K[\mu_n] \cong K[X]/(X^n - 1)$ ist genau dann reduziert, wenn $(X^n - 1)$ ein Radikalideal ist, was genau dann der Fall ist, wenn $f = X^n - 1$ quadratfrei ist. Ist $\mathrm{char}(k) = p$ und $n = pr$ für ein $r \in \mathbb{N}$, so ist $f = (X^r - 1)^p$ nicht quadratfrei. Ansonsten ist $\mathrm{ggT}(X^n - 1, nX^{n-1}) = 1$ und es folgt, dass f in einem algebraischen Abschluss keine mehrfachen Nullstellen hat, also insbesondere quadratfrei ist.

Sei $k = \mathbb{F}_p(t)$ und $G = \ker(\varphi)$, wobei $\varphi \colon \mathbb{G}_a^2 \longrightarrow \mathbb{G}_a$ durch $(x, y) \longmapsto x^p - ty^p$ gegeben ist. Dann ist $k[G] \cong k[X, Y]/(X^p - tY^p)$ reduziert. Jedoch ist G nicht glatt, da für $K = k(\sqrt[p]{t}) = \mathbb{F}_p(\sqrt[p]{t})$ die darstellende Algebra $K[G_K] \cong K[X, Y]/((X - \sqrt[p]{t}Y)^p)$ nicht reduziert ist.

Bemerkung. In Charakteristik 0 sind alle algebraischen Gruppen glatt. Das ist das Theorem von Cartier, siehe Milne, Theorem 9.3.

Definition 46. Sei G eine algebraische k–Gruppe. Sei $k[\varepsilon] := k[X]/(X^2) = k \oplus k\varepsilon$ und $\kappa\colon k[\varepsilon] \longrightarrow k$ durch $\kappa(\varepsilon) = 0$ definiert. Definiere die zu G gehörige *Lie–Algebra* $\mathrm{Lie}(G) := \ker G(\kappa)$, wobei $G(\kappa)\colon G(k[\varepsilon]) \longrightarrow G(k)$ der von κ induzierte Morphismus ist.

Sei $I_G = \ker(u)$ das Augmentationsideal, d.h. der Kern der Koeinheit u. Jedes Element $g \in \mathrm{Lie}(G)$ induziert eine k–lineare Abbildung $I_G \longrightarrow \ker\kappa \cong k$, denn die Relation $g \in \mathrm{Lie}(G) \subset G(k[\varepsilon]) \cong \mathrm{Hom}_k(k[G], k[\varepsilon])$ bedeutet, dass

$$\begin{tikzcd} k[G] \arrow[r, dash, "g"] \arrow[d, dash, "u"'] & k[\varepsilon] \arrow[d, dash, "\kappa"] \\ k \arrow[r, equal] & k \end{tikzcd}$$

kommutiert. Außerdem ist $g(ab) = g(a)g(b) = 0$ für $a, b \in I_G$, d.h. $g(I_G^2) = 0$, und wir erhalten eine eindeutige Faktorisierung

$$\begin{tikzcd} I_G \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \ker\kappa. \\ I_G/I_G^2 \arrow[ur, dash, "\varphi_g"'] & \end{tikzcd}$$

Lemma 47. *Die Abbildung* $\varphi\colon\ \mathrm{Lie}(G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(I_G/I_G^2, \ker\kappa) \cong (I_G/I_G^2)^*$ *ist bijektiv.*

Beweis. Wir konstruieren eine Inverse wie folgt. Sei $h\colon\ I_G/I_G^2 \longrightarrow \ker\kappa$ k–linear. Definiere eine Abbildung $\psi_h\colon k[G] \longrightarrow k[\varepsilon]$ durch $\psi_h(x) = u(x) + h(\overline{x - u(x)})$. Diese Abbildung ist k–linear und sogar ein k–Algebrenhomomorphismus, entspricht also einem Element von $G(k[\varepsilon])$, denn

$$\begin{aligned} \psi_h(xy) &= u(xy) + h(\overline{xy - u(xy)}) = \\ &= u(xy) + h(\overline{xy - u(x)u(y)} - \overline{(x-u(x))(y-u(y))}) = \\ &= u(xy) + h(u(x)\overline{(y-u(y))} + u(y)\overline{(x-u(x))}) = \\ &= u(x)u(y) + u(x)h(\overline{y-u(y)}) + u(y)h(\overline{x-u(x)}) + h(\overline{x-u(x)})h(\overline{y-u(y)}) = \\ &= (u(x) + h(\overline{x-u(x)}))(u(y) + h(\overline{y-u(y)})) = \psi_h(x)\psi_h(y). \end{aligned}$$

Außerdem ist $\kappa \circ \psi_h = u$, also $\psi_h \in \mathrm{Lie}(G)$. Man rechnet leicht nach, dass die Abbildung $\psi\colon\ \mathrm{Hom}_k(I_G/I_G^2, \ker\kappa) \longrightarrow \mathrm{Lie}(G)$ invers zu φ ist. □

Mittels des Isomorphismus φ erhalten wir auf $\mathrm{Lie}(G)$ die Struktur eines k–Vektorraums. Explizit gilt für $g, g' \in \mathrm{Lie}(G)$, dass $(g + g')(x) = g(x) + g'(x) - u(x)$ und $c \cdot g = \lambda_c \circ g$ für $c \in k$, wobei λ_c der k–Algebrenhomomorphismus mit $\lambda_c(\varepsilon) = c\varepsilon$ ist. In der Folge verstehen wir $\mathrm{Lie}(G)$ immer als k–Vektorraum.

Beispiel.

(i) Es ist $\mathrm{Lie}(\{1\}) = 0$.

(ii) Es ist $\mathrm{Lie}(\mathbb{G}_a) = \ker(k[\varepsilon] \longrightarrow k) = k\varepsilon \cong k$.

(iii) Es ist $\mathrm{Lie}(\mathbb{G}_m) = \ker(k[\varepsilon]^\times \longrightarrow k^\times) = \{1 + b\varepsilon \colon b \in k\} \cong k$.

Korollar 48. *Der k–Vektorraum $\mathrm{Lie}(G)$ ist endlich dimensional.*

Beweis. Das Ideal I_G ist ein endlich erzeugter $k[G]$–Modul, also ist I_G/I_G^2 ein endlich erzeugter $k[G]/I_G$–Modul. Wegen $k[G]/I_G \cong k$ ist also I_G/I_G^2 ein endlich dimensionaler k–Vektorraum und damit auch $\mathrm{Lie}(G) \cong (I_G/I_G^2)^*$. □

Sei $a \colon G \longrightarrow H$ ein Morphismus von algebraischen k–Gruppen. Dann haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} G(k[\varepsilon]) \arrow[r, dash, "a_{k[\varepsilon]}"] \arrow[d, dash, "G(\kappa)"'] & H(k[\varepsilon]) \arrow[d, dash, "H(\kappa)"] \\ G(k) \arrow[r, dash, "a_k"'] & H(k) \end{tikzcd}$$

und damit eine Abbildung $\mathrm{d}a \colon \mathrm{Lie}(G) \longrightarrow \mathrm{Lie}(H)$ mit $\mathrm{d}a(g) = a_{k[\varepsilon]}(g)$.

Lemma 49.

(i) *Die Abbildung* $\mathrm{d}a \colon \mathrm{Lie}(G) \longrightarrow \mathrm{Lie}(H)$ *ist linear.*

(ii) *Ist $a^* \colon k[H] \longrightarrow k[G]$ surjektiv, so ist* $\mathrm{d}a$ *injektiv. Ist $a \colon G \hookrightarrow H$ die Inklusion einer Untergruppe, so identifiziert* $\mathrm{d}a \colon \mathrm{Lie}(G) \longrightarrow \mathrm{Lie}(H)$ *den k–Vektorraum* $\mathrm{Lie}(G)$ *mit dem Unterraum* $\mathrm{Lie}(H) \cap G(k[\varepsilon])$.

Beweis.

(i) Es gilt

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}a(g) + \mathrm{d}a(g'))(x) &= \mathrm{d}a(g)(x) + \mathrm{d}a(g')(x) - u_H(x) = \\ &= g(a^*(x)) + g'(a^*(x)) - u_G(a^*(x)) = \\ &= (g + g')(a^*(x)) = \mathrm{d}a(g + g')(x).\end{aligned}$$

und

$$\mathrm{d}a(c \cdot g) = \mathrm{d}a(\lambda_c \circ g) = \lambda_c \circ g \circ a^* = \lambda_c \circ \mathrm{d}a(g) = c \cdot \mathrm{d}a(g)$$

für $g, g' \in \mathrm{Lie}(G) \subset G(k[\varepsilon]) \cong \mathrm{Hom}_k(k[G], k[\varepsilon])$ und $c \in k$.

(ii) Wegen $\mathrm{d}a(g) = g \circ a^*$ folgt mit der Surjektivität von a^* aus $\mathrm{d}a(g) = \mathrm{d}a(g')$, dass $g = g'$. □

Bemerkung. Der k–Vektorraum $\mathrm{Lie}(G)$ trägt eine Lie–Algebrastruktur, d.h. eine bilineare Abbildung $[-,-] \colon \mathrm{Lie}(G) \times \mathrm{Lie}(G) \longrightarrow \mathrm{Lie}(G)$ mit $[x, x] = 0$ und der *Jacobi–Identität* $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$, und $\mathrm{d}a \colon \mathrm{Lie}(G) \longrightarrow \mathrm{Lie}(H)$ ist ein Homomorphismus von Lie-Algebren. Wir werden diese Lie–Algebrastruktur nicht verwenden.

Man kann zeigen, dass die Addition auf $\mathrm{Lie}(G)$ von der Multiplikation auf $G(k[\varepsilon])$ induziert ist.

Beispiel.

(i) Es gilt $\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_n) \cong \mathrm{M}_n(k)$, denn $A+B\varepsilon \in \ker(\mathrm{GL}_n(k[\varepsilon]) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(k))$ heißt genau, dass $A = \mathbb{1}$, und für jedes $B \in \mathrm{M}_n(k)$ ist $\mathbb{1} + B\varepsilon$ wegen $(\mathbb{1} + B\varepsilon)(\mathbb{1} - B\varepsilon) = \mathbb{1}$ invertierbar. Die Lie–Algebrastruktur auf $\mathrm{Lie}(G) \cong \mathrm{M}_n(k)$ ist gegeben durch den Kommutator des Matrizenrings.

(ii) Es ist $\mathrm{Lie}(\mathrm{SL}_n) = \{\mathbb{1} + B\varepsilon \in \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_n) \colon \det(\mathbb{1} + B\varepsilon) = 1\}$. Aber wegen $\varepsilon^2 = 0$ gilt $\det(\mathbb{1} + B\varepsilon) = 1 + \mathrm{tr}(B)\varepsilon$, d.h.

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{SL}_n) = \{\mathbb{1} + B\varepsilon \in \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_n) \colon \mathrm{tr}(B) = 0\} \cong \ker(\mathrm{tr}) \subset \mathrm{M}_n(k).$$

(iii) Es gilt

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{O}_n) = \{\mathbb{1} + B\varepsilon \in \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_n) \colon (\mathbb{1} + B\varepsilon)^T(\mathbb{1} + B\varepsilon) = \mathbb{1}\}.$$

Aber $(\mathbb{1}+B\varepsilon)^T(\mathbb{1}+B\varepsilon) = \mathbb{1}+(B^T+B)\varepsilon$, also ist $\mathrm{Lie}(\mathrm{O}_n)$ gerade der k–Vektorraum der schiefsymmetrischen Matrizen.

(iv) Es gilt

$$\mathrm{Lie}(\mu_n) = \{1 + b\varepsilon \in \mathrm{Lie}(\mathbb{G}_m) \colon (1 + b\varepsilon)^n = 1 + nb\varepsilon = 1\}.$$

Man erhält also

$$\mathrm{Lie}(\mu_n) = \begin{cases} 0 & \mathrm{char}(k) = 0 \text{ oder } \mathrm{char}(k) = p \nmid n \\ \mathrm{Lie}(\mathbb{G}_m) \cong k & \text{sonst} \end{cases}$$

Lemma 50.

(i) *Seien $a \colon H \longrightarrow G$, $a' \colon H' \longrightarrow G$ Morphismen von algebraischen k–Gruppen. Dann ist* $\mathrm{Lie}(H \times_G H') \cong \mathrm{Lie}(H) \times_{\mathrm{Lie}(G)} \mathrm{Lie}(H')$.
Speziell gilt also immer $\mathrm{Lie}(H \times H') \cong \mathrm{Lie}(H) \times \mathrm{Lie}(H')$, $\mathrm{Lie}(\ker a) \cong \ker \mathrm{d}a$ *und* $\mathrm{Lie}(H \cap H') \cong \mathrm{Lie}(H) \cap \mathrm{Lie}(H')$.

(ii) *Für jede Körpererweiterung $k'|k$ ist* $\mathrm{Lie}(G_{k'}) \cong \mathrm{Lie}(G) \otimes_k k'$ *als k'–Vektorraum.*

(iii) *Für jede endliche Körpererweiterung $k'|k$ und jede algebraische k'–Gruppe k ist* $\mathrm{Lie}(\mathrm{R}_{k'|k}(G')) \cong \mathrm{Lie}(G')$ *als k–Vektorraum.*

Beweis.

(i) Es ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Lie}(H \times_G H') &= \ker((H \times_G H')(k[\varepsilon]) \longrightarrow (H \times_G H')(k)) = \\ &= \ker(H(k[\varepsilon]) \times_{G(k[\varepsilon])} H'(k[\varepsilon]) \longrightarrow H(k) \times_{G(k)} H'(k)) = \\ &= \{(x, x') \in \mathrm{Lie}(H) \times \mathrm{Lie}(H') \colon \mathrm{d}a(x) = \mathrm{d}a'(x')\} = \\ &= \mathrm{Lie}(H) \times_{\mathrm{Lie}(G)} \mathrm{Lie}(H').\end{aligned}$$

(ii) Es ist nach Lemma 47

$$\mathrm{Lie}(G_{k'}) \cong (I_{G_{k'}}/I^2_{G_{k'}})^*$$

und

$$\mathrm{Lie}(G) \otimes_k k' \cong (I_G/I_G^2)^* \otimes_k k' \cong \big(I_G \otimes_k k'/(I_G^2 \otimes_k k')\big)^*.$$

Aber es gilt $I_{G_{k'}} = \ker u_{G_{k'}} = \ker u_G \otimes \mathrm{id}_{k'} = (\ker u_G) \otimes_k k' = I_G \otimes_k k'$ und $I^2_{G_{k'}} = (I_G \otimes_k k')^2 = I_G^2 \otimes_k k'$. Daher folgt die Aussage.

(iii) Es gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Lie}(\mathrm{R}_{k'|k}(G')) &= \ker(\mathrm{R}_{k'|k}(G')(k[\varepsilon]) \longrightarrow \mathrm{R}_{k'|k}(G')(k)) \\ &= \ker(G'(k[\varepsilon] \otimes_k k') \longrightarrow G'(k \otimes_k k')) = \\ &\cong \mathrm{Lie}(G').\end{aligned}$$

□

Definition 51. Ein lokaler Ring $(R, \mathfrak{m})$ heißt *regulär*, falls R noethersch ist und die Krulldimension $\dim R$ von R genau $\dim_{\kappa(\mathfrak{m})} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ist.

Proposition 52. *Sei G eine algebraische k–Gruppe und $K|k$ eine algebraisch abgeschlossene Körpererweiterung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*
(i) *G ist glatt.*
(ii) *$K[G_K] \cong k[G] \otimes_k K$ ist reduziert.*
(iii) *$K[G_K]_\mathfrak{m}$ ist ein regulärer lokaler Ring für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset K[G_K]$.*
(iv) *$K[G_K]_\mathfrak{m}$ ist ein regulärer lokaler Ring für $\mathfrak{m} = I_{G_K}$.*
(v) *$\dim G = \dim_k \mathrm{Lie}(G)$.*

Für den Beweis von Proposition 52 brauchen wir ein Lemma, sowie folgende zwei Tatsachen aus der kommutativen Algebra:
(i) Jeder reguläre lokale Ring R ist ein Integritätsring und insbesondere reduziert.
(ii) Ist $A \neq 0$ eine reduzierte, endlich erzeugte K–Algebra für einen algebraisch abgeschlossenen Körper K, so existiert ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subset A$, so dass $A_\mathfrak{m}$ regulär ist.

Lemma 53. *Sei G eine algebraische K–Gruppe für einen algebraisch abgeschlossenen Körper K. Dann gilt:*
(i) *$\mathrm{Aut}_K(K[G])$ operiert transitiv auf $\mathrm{Max}(K[G])$.*
(ii) *Alle Lokalisierungen $K[G]_\mathfrak{m}$ an maximalen Idealen $\mathfrak{m}$ sind isomorph.*

Beweis. Da K algebraisch abgeschlossen ist, haben wir eine Bijektion

$$G(K) \cong \mathrm{Hom}_K(K[G], K) \cong \mathrm{Max}(K[G])$$

unter der $1 \in G(K)$ dem Augmentationsideal I_G entspricht. Sei $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(K[G])$ und $g \in G(K)$ das entsprechende Gruppenelement, d.h.

$$\mathfrak{m} = \ker \alpha_K(g) = \{t \in K[G] \colon t_K(g) = 0\}.$$

Die natürliche Transformation $\ell_G\colon V\circ G \longrightarrow V\circ G$ mit $(\ell_g)_R(h) = g_R h$ auf R–Punkten entspricht dem K–Algebrenhomomorphismus $\varphi_g\colon K[G] \longrightarrow K[G]$ mit $\varphi_g(t)_R(h) = t_R(g_R h)$ auf R–Punkten. Dann ist

$$\varphi_g^{-1}(I_G) = \{t \in K[G]\colon t_K(g) = 0\} = \mathfrak{m}.$$

Aber ℓ_g ist invertierbar, also φ_g ein Automorphismus.

Der zweite Teil des Lemmas folgt sofort aus der universellen Eigenschaft der Lokalisierung. □

Korollar 54. *Sei G eine algebraische k–Gruppe und $K|k$ eine algebraisch abgeschlossene Körpererweiterung. Dann gilt*

(i) $\dim G = \dim K[G_K]_{\mathfrak{m}}$ *für jedes maximale Ideal* $\mathfrak{m} \subset K[G]$.

(ii) $\dim G \leq \dim_k \mathrm{Lie}(G)$ *mit Gleichheit genau dann, wenn* $K[G_K]_{I_{G_K}}$ *ein regulärer lokaler Ring ist.*

Beweis. Die Aussage (i) folgt aus Lemma 53, der Tatsache $\dim R = \sup_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(R)} \dim R_{\mathfrak{m}}$ und $\dim G = \dim G_K$. Für (ii) bemerkt man

$$\dim G = \dim K[G_K]_{I_{G_K}} \leq \dim_K I_{G_K}/I_{G_K}^2 = \dim_K \mathrm{Lie}(G_K) = \dim_k \mathrm{Lie}(G)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $K[G_K]_{I_{G_K}}$ regulär ist. □

Beweis von Proposition 52.

(i→ii) Klar.

(ii→iii↔iv) Ist $K[G_K]$ reduziert, so gibt es wie oben bemerkt ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subset K[G_K]$, so dass $K[G_K]_{\mathfrak{m}}$ regulär ist. Wegen Lemma 53 ist das äquivalent zu (iii) und (iv).

(iii→ii) Ist $K[G_K]_{\mathfrak{m}}$ regulär für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subset \mathrm{Max}(K[G])$, so ist $K[G_K]_{\mathfrak{m}}$ reduziert für alle $\mathfrak{m}$. Also ist auch $K[G_K]$ reduziert, denn für jeden Ring R ist der kanonische Homomorphismus

$$R \hookrightarrow \prod_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(R)} R_{\mathfrak{m}}$$

injektiv.

(iv↔v) Folgt aus Korollar 54

(v→i) Sei $k'|k$ eine Körpererweiterung. Wähle eine algebraisch abgeschlossene Körpererweiterung $K|k'$. Wegen (ii↔v) folgt, dass $k[G]\otimes_k K$ reduziert ist, also ist das wegen $k[G] \otimes_k k' \subset k[G] \otimes_k K$ auch $k'[G]$. □

Beispiel. Sei $\mathrm{char}\, k \neq 2$. Dann ist O_n glatt und $\dim \mathrm{O}_n = n(n-1)/2$, denn

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{O}_n) \cong \{A \in \mathrm{M}_n(k)\colon A + A^T = 0\}$$

hat Dimension $n(n-1)/2$ über k. Es genügt also zu zeigen, dass $\dim \mathrm{O}_n \geq n(n-1)/2$. Es gilt

$$k[\mathrm{O}_n] \cong \frac{k[X_{ij}]}{\left(\sum_{i=1}^n X_{i\ell}X_{im} = \delta_{\ell m} : 0 \leq \ell \leq m \leq n\right)}.$$

Das Ideal hat $n(n+1)/2$ Erzeugende und aus dem Krullschen Höhensatz folgt dann für die Dimension $\dim \mathrm{O}_n \geq n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$.

Korollar 55. *Sind G und G' glatt, so auch $G \times G'$.*

Beweis. Sind G und G' glatt, so folgt $\dim G = \dim_k \mathrm{Lie}(G)$ und $\dim G' = \dim_k \mathrm{Lie}(G')$, also $\dim G \times G' = \dim G + \dim G' = \dim_k \mathrm{Lie}(G) \times \mathrm{Lie}(G') = \dim_k \mathrm{Lie}(G \times G')$. Also ist $G \times G'$ glatt. □

II.3. Exaktheit und Quotienten

Definition 56. Ein Morphismus $a\colon G \longrightarrow H$ von k–Gruppen heißt
(i) *injektiv*, falls a^* surjektiv ist.
(ii) *surjektiv*, falls a^* injektiv ist.
(iii) *bijektiv*, falls a^* bijektiv ist.

Ein Morphismus $a\colon G \longrightarrow H$ von k–Gruppen ist genau dann injektiv und surjektiv, wenn a bijektiv ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $a_R\colon G(R) \longrightarrow H(R)$ für jede k–Algebra R bijektiv ist. Ist a injektiv, so ist jedes $a_R\colon G(R) \longrightarrow H(R)$ injektiv.

Aber im Allgemeinen ist für einen surjektiven Morphismus $a\colon G \longrightarrow H$ nicht auch $a_R\colon G(R) \longrightarrow H(R)$ surjektiv. Sei zum Beispiel $k = \mathbb{Q} = R$ und betrachte den Morphismus $\mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m$ mit $x \longmapsto x^2$. Dieser Morphismus ist surjektiv, aber nicht surjektiv auf $\mathbb{Q}$–Punkten.

Wir werden zeigen, dass ein Morphismus $a\colon G \longrightarrow H$ genau dann injektiv ist, wenn jedes $a_R\colon G(R) \longrightarrow H(R)$ injektiv ist. Dazu benötigen wir ein technisches Hilfsmittel, die Treu–Flachheit von Hopf–Algebren. Für einen Ring A schreiben wir A-**Mod** für die Kategorie der A–Moduln.

Definition 57. Ein Ringhomomorphismus $f\colon A \longrightarrow B$ heißt *treu–flach*, falls eine Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

von A–Moduln genau dann exakt ist, wenn die induzierte Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \otimes_A B \longrightarrow M \otimes_A B \longrightarrow M'' \otimes_A B \longrightarrow 0$$

von B–Moduln exakt ist. Insbesondere ist jeder treu–flache Ringhomomorphismus flach.

Lemma 58. *Sei $f\colon A \longrightarrow B$ treu–flach. Dann gilt:*

(i) *Ist* $M \otimes_A B = 0$ *für* $M \in A$-***Mod***, *so folgt bereits* $M = 0$.

(ii) *Ist*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{g} M_2 \xrightarrow{h} M_3$$

eine Sequenz von A*–Moduln, so dass*

$$0 \longrightarrow M_1 \otimes_A B \xrightarrow{g \otimes \mathrm{id}} M_2 \otimes_A B \xrightarrow{h \otimes \mathrm{id}} M_3 \otimes_A B$$

exakt ist, dann ist auch die ursprüngliche Sequenz exakt.

(iii) *Der Ringhomomorphismus* $f\colon A \longrightarrow B$ *ist injektiv und*

$$f(A) = \{b \in B\colon b \otimes 1 = 1 \otimes b \in B \otimes_A B\}.$$

Anders gesagt, die Sequenz

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\varphi} B \otimes_A B$$

mit $\varphi(x) = b \otimes 1 - 1 \otimes b$ *ist exakt.*

(iv) *Jedes* $\mathfrak{n} \in \mathrm{Max}(A)$ *ist von der Form* $\mathfrak{n} = f^{-1}(\mathfrak{m})$ *für ein* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(B)$.

Beweis.

(i) Die Sequenz $0 \longrightarrow 0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$ ist exakt, da $M \otimes_A B = 0$ ist. Also ist $M = 0$.

(ii) Ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow M_1 \otimes_A B \xrightarrow{g \otimes \mathrm{id}} M_2 \otimes_A B \xrightarrow{h \otimes \mathrm{id}} M_3 \otimes_A B$$

exakt, so auch

$$0 \longrightarrow M_1 \otimes_A B \xrightarrow{g \otimes \mathrm{id}} M_2 \otimes_A B \xrightarrow{h \otimes \mathrm{id}} \mathrm{im}(h \otimes \mathrm{id}) \longrightarrow 0$$

und $\mathrm{im}(h \otimes \mathrm{id}) = h(M_2) \otimes_A B$, wegen der Flachheit. Wegen der Treu–Flachheit folgt, dass

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{g} M_2 \xrightarrow{h} h(M_2) \longrightarrow 0$$

exakt ist, d.h. dass

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{g} M_2 \xrightarrow{h} M_3$$

exakt ist.

(iii) Es genügt, die Aussage nach Tensorieren mit B zu zeigen, d.h. dass

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{1\otimes -} B \otimes_A B \xrightarrow{\varphi\otimes \mathrm{id}} B \otimes_A B \otimes_A B$$

exakt ist. Die Abbildung $1 \otimes -$ hat ein Linksinverses $s_0 \colon B \otimes_A B \longrightarrow B$, gegeben durch $s_0(b_1 \otimes b_2) = b_1 b_2$, ist also injektiv. Definiere $s_1 \colon B \otimes_A B \otimes_A B \longrightarrow B \otimes_A B$ durch $s_1(b_1 \otimes b_2 \otimes b_3) = b_1 \otimes (b_2 b_3)$. Dann ist $s_1(\varphi \otimes \mathrm{id}) + (1 \otimes -)s_0 = \mathrm{id}_{B\otimes_A B}$, also folgt $\mathrm{im}(1 \otimes -) \supset \ker(\varphi \otimes \mathrm{id})$. Es folgt sogar Gleichheit.

(iv) Sei $\mathfrak{n} \in \mathrm{Max}(A)$. Dann ist $A/\mathfrak{n} \neq 0$, also $B/f(\mathfrak{n})B \cong A/\mathfrak{n} \otimes_A B \neq 0$. Also existiert ein $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(B)$ mit $\mathfrak{m} \supset f(\mathfrak{n})B \supset f(\mathfrak{n})$. Es folgt $f^{-1}(\mathfrak{m}) \supset f^{-1}(f(\mathfrak{n})) \supset \mathfrak{n}$, also $\mathfrak{n} = f^{-1}(\mathfrak{m})$. □

Folgendes Resultat ist im Folgenden sehr wichtig, aber der Beweis ist aufwändig und wir verweisen auf die Literatur, siehe Waterhouse Kapitel 14 oder Milne Kapitel 11.

Lemma 59. *Ist $f \colon A \longrightarrow B$ ein injektiver Homomorphismus von Hopf–Algebren über k, so ist f treu–flach.*

Satz 60. *Sei $a \colon G \longrightarrow H$ Morphismus von algebraischen k–Gruppen und $K|k$ eine algebraisch abgeschlossene Körpererweiterung. Dann sind äquivalent:*

(i) *a ist injektiv, d.h. a^* surjektiv.*

(ii) *a_R ist injektiv für alle k–Algebren R, d.h.* $\ker a = \{1\}$.

(iii) *a_K und* $\mathrm{d}a \colon \mathrm{Lie}(G) \longrightarrow \mathrm{Lie}(H)$ *sind injektiv.*

Beweis. Die Richtung (i)→(iii) haben wir schon gesehen. Für (iii)→(ii) sei $N = \ker a$. Dann ist $N(K) = \ker(a_K) = \{1\}$, also N endlich nach Lemma 43. Außerdem ist $\mathrm{Lie}(N) = \mathrm{Lie}(\ker a) = \ker(\mathrm{d}a) = 0$ nach Lemma 50. Also ist $\dim N = 0 = \dim_k \mathrm{Lie}(N)$ und N glatt wegen Proposition 52, insbesondere $K[N_K]$ reduziert. Es folgt

$$K[N_K] \cong K[N_K]_{\mathrm{red}} \cong \prod_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(K[N_K])} K[N_K]/\mathfrak{m} \cong K^n$$

mit $n = \dim_k K[N_K] = \dim_k k[N]$. Also ist $n = |\,\mathrm{Max}(K[N_K])| = |N(K)| = 1$, d.h. $k[N] = k$ und damit $N = \{1\}$.

Für (ii)→(i) haben wir eine Faktorisierung $G \xrightarrow{\overline{a}} \mathrm{im}\, a \hookrightarrow H$, worin $\mathrm{im}\, a \hookrightarrow H$ injektiv und $\overline{a}$ surjektiv ist. Daher können wir ohne Einschränkung annehmen, dass a surjektiv, also dass $a^* \colon k[H] \longrightarrow k[G]$ injektiv ist. Wegen Lemma 59 ist a^* treu–flach und nach Lemma 58 ist

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{a^*} B \xrightarrow{\varphi} B \otimes_A B,$$

mit $A = k[H]$, $B = k[G]$ und $\varphi(b) = b \otimes 1 - 1 \otimes b$, exakt. Seien $g_1, g_2 \in G(B \otimes_A B) = \mathrm{Hom}_k(B, B \otimes_A B)$ die Gruppenelemente mit $g_1(b) = b \otimes 1$ und $g_2(b) = 1 \otimes b$. Dann ist

$a_{B\otimes_A B}(g_1) = g_1 \circ a^* = g_2 \circ a^* = a_{B\otimes_A B}(g_2)$. Wegen der Injektivität von $a_{B\otimes_A B}$ folgt $g_1 = g_2$, d.h.

$$B = \{b \in B : b \otimes 1 = 1 \otimes b\} = a^*(A).$$

Also ist a^* surjektiv, d.h. a injektiv. □

Proposition 61. *Sei $a\colon G \longrightarrow H$ ein Morphismus von algebraischen k–Gruppen und $K|k$ eine algebraisch abgeschlossenen Körpererweiterung.*

(i) *Ist a surjektiv, d.h. a^* injektiv, so ist auch $a_K\colon G(K) \longrightarrow H(K)$ surjektiv.*

(ii) *Ist H glatt, so ist genau dann a surjektiv, wenn $a_K\colon G(K) \longrightarrow H(K)$ surjektiv ist.*

Beweis.

(i) Sei ohne Einschränkung $k = K = K_{\text{alg}}$. Wegen Lemma 59 ist $a^*\colon k[H] \longrightarrow k[G]$ treu–flach. Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} G(k) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "\wr"] & H(k) \arrow[d, dash, "\wr"] \\ \operatorname{Max}(k[G]) \arrow[r, dash] & \operatorname{Max}(k[H]). \\ \mathfrak{m} \arrow[r, mapsto] & (a^*)^{-1}(\mathfrak{m}) \end{tikzcd}$$

Also folgt mit Lemma 58, dass a_k surjektiv ist.

(ii) Sei $a_K\colon G(K) \longrightarrow H(K)$ surjektiv und H glatt und wieder ohne Einschränkung $k = K = K_{\text{alg}}$. Wegen der Surjektivität von a_k ist jedes $\mathfrak{n} \in \operatorname{Max}(k[H])$ von der Form $(a^*)^{-1}(\mathfrak{m})$ mit $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(k[G])$, enthält also insbesondere $\ker a^*$. Also ist

$$\ker a^* \subset \bigcap_{\mathfrak{n}\in\operatorname{Max}(k[H])} \mathfrak{n} = \operatorname{Nil}(k[H]) = \operatorname{Nil}(K[H]) = 0,$$

denn H ist glatt. Also ist a^* injektiv, d.h. a surjektiv. □

Korollar 62. *Sei $a\colon G \longrightarrow H$ ein Morphismus von algebraischen k–Gruppen, H glatt und sei $K|k$ eine algebraische abgeschlossenen Körpererweiterung. Dann sind äquivalent:*

(i) *a ist ein Isomorphismus (d.h. bijektiv).*

(ii) *a ist injektiv und surjektiv.*

(iii) *$a_K\colon G_K \longrightarrow H_K$ ist ein Isomorphismus und* $\mathrm{d}a\colon \operatorname{Lie}(G) \longrightarrow \operatorname{Lie}(H)$ *ist injektiv.*

Beweis. Das folgt direkt aus Satz 60 und Proposition 61 □

Bemerkung. Ist k nicht unbedingt ein Körper, so sollte man surjektive Morphismen $a\colon G \longrightarrow H$ als diejenigen Morphismen definieren, für die $a^*\colon K[H] \longrightarrow K[G]$ treu–flach ist.

Übung.

(i) Ist $f\colon R \longrightarrow S$ treu–flach, so ist für jeden Ringhomomorphismus $g\colon R \longrightarrow A$ der Ringhomomorphismus $A \longrightarrow S \otimes_R A$ ebenfalls treu–flach.

(ii) Ein Morphismus $a\colon G \longrightarrow H$ von algebraischen k–Gruppen ist genau dann surjektiv, wenn es für jede k–Algebra R und jedes $h \in H(R)$ eine treu–flache Ringerweiterung $S|R$ gibt mit $h_S \in \operatorname{im}(a_S)$.

Definition 63. Sei G eine algebraische k–Gruppe und N eine normale Untergruppe von G. Eine algebraische k–Gruppe H mit einem surjektiven Morphismus $a\colon G \longrightarrow H$ mit Kern N heißt *Quotient* von G modulo N.

Lemma 64.

(i) *Ist $a\colon G \longrightarrow H$ surjektiv mit Kern N, so faktorisiert jeder Morphismus $a'\colon G \longrightarrow H'$ mit Kern $\ker a' \supset N$ eindeutig durch a.*

(ii) *Ein Quotient von G modulo N ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie, d.h. sind $a\colon G \longrightarrow H$ und $a'\colon G \longrightarrow H'$ surjektiv mit Kern N, so existiert ein eindeutiger Isomorphismus $b\colon H \longrightarrow H'$ mit $b \circ a = a'$.*

Beweis. (i) Sei $A = k[H]$, $B = k[G]$ und $g_1, g_2\colon B \longrightarrow B \otimes_A B$ mit $g_1(b) = b \otimes 1$ und $g_2(b) = 1 \otimes b$. Dann sind $g_1, g_2 \in \operatorname{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(B, B \otimes_A B) \cong G(B \otimes_A B)$. Wegen $a_{B\otimes_A B}(g_1) = a_{B\otimes_A B}(g_2)$ existiert ein $n \in N(B \otimes_A B)$ mit $g_1 = ng_2$. Dann gilt

$$g_1 \circ (a')^* = a'_{B\otimes_A B}(g_1) = a'_{B\otimes_A B}(g_2) = g_2 \circ (a')^*,$$

d.h. $\operatorname{im}(a')^* \subset \{b \in B\colon b \otimes 1 = 1 \otimes b\} = a^*(A)$. Die letzte Gleichung benutzt, dass a^* treu–flach ist. Wir erhalten also eine eindeutige Faktorisierung

$$\begin{tikzcd}
k[H'] \arrow[r, dash] \arrow[drr, dash, "(a')^*"'] & a^*(A) \arrow[r, dash, "\sim"] & k[H] \arrow[d, dash, "a^*"] \\
 & & k[G]
\end{tikzcd}$$

und diese entspricht einer eindeutigen Faktorisierung

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, dash, "a"] \arrow[dr, dash, "a'"'] & H \arrow[d, dash] \\
 & H'.
\end{tikzcd}$$

(ii) folgt direkt aus (i). $\square$

Beispiel.

(i) Die Untergruppe $\mu_n \subset \mathbb{G}_m$ ist normal mit Quotient $\mathbb{G}_m$, da $(-)^n\colon \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m$ surjektiv mit Kern μ_n ist. Das ist der Fall, da $\mathbb{G}_m$ glatt und $(-)^n\colon k_{\mathrm{alg}}^\times \longrightarrow k_{\mathrm{alg}}^\times$ surjektiv ist.

(ii) Die Untergruppe $\mathrm{SL}_n \subset \mathrm{GL}_n$ ist normal mit Quotient $\mathbb{G}_m$, da $\det\colon \mathrm{GL}_n \longrightarrow \mathbb{G}_m$ surjektiv ist.

(iii) Für $m \mid n$ ist $\mu_m \subset \mu_n$ normal mit Quotient $\mu_{n/m}$.

Das folgende Resultat ist wichtig, aber nur mit viel Aufwand zu beweisen. Der Beweis wird in Waterhouse Kapitel 16 oder Milne Kapitel 17 geführt.

Satz 65. *Für jede normale Untergruppe N einer algebraischen k–Gruppe G existiert ein Quotient H von G modulo N. Wir schreiben $G/N := H$, das ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.*

Beweisskizze. Als k–Gruppenfunktor definiert man den Quotienten H von G modulo N wie folgt. Sei $H_n\colon k\text{-}\mathbf{Alg} \longrightarrow \mathbf{Grp}$ der "naive" Quotient, d.h. $H_n(R) = G(R)/N(R)$. Ist $R \longrightarrow S$ treu–flach, so sei

$$H(R \longrightarrow S) = \{h \in H_n(S)\colon H_n(\iota_1)(h) = H_n(\iota_2)(h) \in H_n(S \otimes_R S)\}$$

der Egalisator von $H_n(\iota_1), H_n(\iota_2)\colon H_n(S) \longrightarrow H_n(S \otimes_R S)$ wobei $\iota_1(s) = s \otimes 1$ und $\iota_2(s) = 1 \otimes s$. Man definiert nun

$$H(R) = \varinjlim H(R \longrightarrow S)$$

als den direkten Limes über alle treu–flachen Ringhomomorphismen $R \longrightarrow S$, wobei $(R \longrightarrow S') \supset (R \longrightarrow S)$, falls $R \longrightarrow S'$ durch $R \longrightarrow S$ so faktorisiert, dass $S \longrightarrow S'$ treu–flach ist. Man zeigt dann, dass der natürliche Morphismus $H_n \longrightarrow H$ trivialen Kern hat und dass H eine algebraische k–Gruppe ist. Explizit gilt

$$k[H] = \{x \in k[G]\colon c(x) - x \otimes 1 \in k[G] \otimes_k I(N)\}.$$

Dann ist die Komposition $G \longrightarrow H_n \longrightarrow H$ surjektiv und hat Kern N. Besonders die Darstellbarkeit ist dabei schwierig zu zeigen.

Definition 66. Eine Sequenz

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{a} G \xrightarrow{b} H \longrightarrow 1$$

von algebraischen k–Gruppen heißt *exakt*, falls b surjektiv ist und a einen Isomorphismus $N \xrightarrow{\sim} \ker b$ induziert.

Lemma 67. *Ist*

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{a} G \xrightarrow{b} H \longrightarrow 1$$

eine exakte Sequenz und $K|k$ eine algebraisch abgeschlossene Erweiterung von k, dann ist

$$1 \longrightarrow N(K) \xrightarrow{a_K} G(K) \xrightarrow{b_K} G(K) \longrightarrow 1$$

exakt.

Beweis. Da a einen Isomorphismus $N \xrightarrow{\sim} \ker b$ induziert, ist

$$1 \longrightarrow N(K) \xrightarrow{a_K} G(K) \xrightarrow{b_K} H(K)$$

exakt und da b surjektiv ist, ist wegen Proposition 61 auch

$$G(K) \xrightarrow{b_K} H(K) \longrightarrow 1$$

exakt. □

Korollar 68. *In einer exakten Sequenz*

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{a} G \xrightarrow{b} H \longrightarrow 1$$

ist G genau dann endlich, wenn N und H es sind.

Beweis. Das folgt sofort aus Lemma 67 und Lemma 43. □

Lemma 69. *Sei H glatt und $K|k$ eine algebraisch abgeschlossene Erweiterung. Dann ist*

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{a} G \xrightarrow{b} H \longrightarrow 1$$

genau dann exakt, wenn

(i) *Für alle $R \in k$-**Alg** ist $1 \longrightarrow N(R) \xrightarrow{a_R} G(R) \xrightarrow{b_R} H(R)$ exakt, und*
(ii) *der Homomorphismus $b_K\colon G(K) \longrightarrow H(K)$ ist surjektiv.*

Beweis. Wegen Proposition 61 ist $b\colon G \longrightarrow H$ genau dann surjektiv, wenn (ii) gilt, und a induziert genau dann einen Isomorphismus $N \xrightarrow{\sim} \ker b$, wenn (i) gilt. □

Proposition 70. *Ist*

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{a} G \xrightarrow{b} H \longrightarrow 1$$

eine exakt Sequenz, so ist $\dim G = \dim N + \dim H$.

Beweis. Wir haben diese Formel schon im Spezialfall $G = N \times H$ gesehen oder wenn G endlich ist. Für den allgemeinen Fall verwenden wir ein wichtiges Resultat aus der kommutativen Algebra über flache Morphismen:

Lemma 71. *Sei $f\colon A \longrightarrow B$ ein flacher Homomorphismus von k–Algebren, wobei A und B endlich erzeugt sind. Dann gilt für alle Primideale $\mathfrak{q}$ von B und $\mathfrak{p} = f^{-1}(\mathfrak{q})$, dass*

$$\dim B_{\mathfrak{q}} = \dim A_{\mathfrak{p}} + \dim(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}))_{\mathfrak{q}'},$$

wobei $\mathfrak{q}'$ das eindeutige Primideal in $B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ mit Urbild $\mathfrak{q}$ in B ist.

Leicht allgemeiner bzw. geometrischer gilt für einen flachen Morphismus $f\colon X \longrightarrow Y$ von k–Schemata von endlichem Typ, dass

$$\dim_x X = \dim_y Y + \dim_x X_y.$$

für alle $x \in X$ und $y = f(x)$, wobei $\dim_x X = \dim \mathcal{O}_{X,x}$ *die* lokale Dimension *von X an x und X_y die geometrische Faser über y ist.*

Der Beweis findet sich in Hartshorne, Kapitel III Proposition 9.5.

Beweis von Proposition 70 (Fort.) Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass k algebraisch abgeschlossen ist. Setze $A = k[H]$, $B = k[G]$ und sei $\mathfrak{q} = I_G$ das Augmentationsideal. Der Homomorphismus $b^*\colon A \longrightarrow B$ ist treu–flach, insbesondere flach, und $k[N] = k[G] \otimes_{k[H]} k = B \otimes_A \kappa(I_H)$. Die Sequenz

$$1 \longrightarrow N(k) \longrightarrow G(k) \longrightarrow H(k) \longrightarrow 1$$

ist exakt und man hat Bijektionen $G(k) \cong \mathrm{Max}(B)$ und $H(k) \cong \mathrm{Max}(A)$, wobei $1 \in G(k)$ dem Augmentationsideal $\mathfrak{q}$ entspricht. Es folgt, dass in der Notation von Lemma 71 $\mathfrak{q}' = I_N$ und $\mathfrak{p} = I_H$ gilt. Es folgt, dass

$$\dim k[G]_{I_G} = \dim k[H]_{I_H} + \dim k[N]_{I_N}.$$

Da k algebraisch abgeschlossen ist, folgt aus Korollar 54 also $\dim G = \dim H + \dim N$. □

Bemerkung. Ist G endlich, so nennt man $|G| := \dim_k k[G]$ die *Ordnung* von G. Zum Beispiel ist $|\mu_n| = n$. Ist G zusätzlich glatt, so ist $|G| = |G(k_{\mathrm{alg}})|$, da dann $k_{\mathrm{alg}}[G_{k_{\mathrm{alg}}}] \cong k_{\mathrm{alg}}^{\dim_k k[G]}$ gilt. Ist $1 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 1$ eine exakte Sequenz, in der G (und damit N und H) endlich ist, so kann man zeigen, dass $|G| = |N| \cdot |H|$. Sind G und N (und damit auch H) glatt, so folgt das aus Lemma 67. Der allgemeine Fall erfordert mehr Arbeit.

Korollar 72. *Ist* $1 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 1$ *exakt und sind* N *und* H *glatt, so ist auch* G *glatt. Im Allgemeinen folgt aber nicht, dass* N *glatt ist, wenn* G *glatt ist.*

Beweis. Sei b der Morphismus $b\colon G \longrightarrow H$. Wegen Lemma 50 ist $\mathrm{Lie}(N) \cong \ker(\mathrm{d}b)$. Also folgt aus Proposition 52 und Proposition 70, dass

$$\dim G = \dim N + \dim H = \dim_k \mathrm{Lie}(N) + \dim_k \mathrm{Lie}(H) \geq \dim_k \mathrm{Lie}(G) \geq \dim G,$$

das heißt, dass G glatt ist. □

II.4. Zusammenhangskomponente der Eins

Das Ziel dieses Abschnitts ist die Konstruktion einer exakten Sequenz

$$1 \longrightarrow G^0 \longrightarrow G \longrightarrow \pi_0(G) \longrightarrow 1,$$

so dass G^0 als affines Schema zusammenhängend ist und $\pi_0(G)$ eine glatte endliche algebraische Gruppe ist, deren Ordnung die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $G_{k_{\mathrm{alg}}}$ als affinem Schema zählt.

Lemma 73. *Sei* A *eine als* k*–Vektorraum endlich dimensionale* k*–Algebra. Sei* $K|k$ *eine algebraisch abgeschlossene Erweiterung. Dann sind äquivalent:*
(i) $A \otimes_k K$ *ist reduziert.*
(ii) $A \otimes_k K \cong K^{\dim_k A}$.
(iii) $A \cong \prod_i L_i$ *mit endlichen, separablen Körpererweiterungen* $L_i|k$.

Beweis. Die Richtung (ii→i) ist klar. Für (iii→ii) sei $A \cong \prod_i L_i$ mit $L_i|k$ separabel und endlich. Aus dem Satz vom primitiven Element folgt, dass $L_i \cong k[X]/(f_i)$ für separable Polynome $f_i \in k[X]$, d.h. keins der f_i hat mehrfache Nullstellen in K. Es folgt aus dem chinesischen Restsatz, dass

$$A \otimes_k K \cong \prod_i K[X]/(f_i) \cong \prod_i K^{\deg f_i} \cong K^{\dim_k A}.$$

Für (i→iii) bemerke man, dass A reduziert ist, wenn $A \otimes_k K$ reduziert ist, und es folgt, dass

$$A \cong \prod_{i=1}^{r} A/\mathfrak{m}_i,$$

worin $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ die maximalen Ideale von A sind. Es bleibt noch zu zeigen, dass jedes $L_i := A/\mathfrak{m}_i$ eine separable Körpererweiterung von k ist. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $A = L$ eine Körper ist, da das Tensorprodukt mit endlichen Produkten vertauscht. Nehme an, L wäre nicht separabel, d.h. es gibt ein Element $x \in L$, dessen Minimalpolynom f nicht separabel ist. Wir erhalten eine Injektion $k[X]/(f) \hookrightarrow L$ und somit auch eine Injektion $K[X]/(f) \hookrightarrow L \otimes_k K$. Aber $K[X]/(f)$ ist nicht reduziert, da f nicht separabel ist, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass $A \otimes_k K$ reduziert ist. □

Definition 74. Eine k–Algebra heißt *étale*, falls sie endlich dimensional ist und die äquivalenten Bedingungen aus Lemma 73 erfüllt.

Korollar 75. *Unteralgebren, endliche Produkte, Quotienten und Tensorprodukte von étalen k–Algebren sind wieder étale.*

Beweis. Für Unteralgebren verwenden wir (i) aus Lemma 73. Für endliche Produkte, Quotienten und Tensorprodukte verwendet man (ii). □

Korollar 76. *Sei $k'|k$ eine Körpererweiterung und A eine k–Algebra. Dann ist A genau dann étale, falls $A \otimes_k k'$ dies als k'–Algebra ist.*

Beweis. Sei $K|k'$ eine algebraisch abgeschlossene Körpererweiterung. Dann gilt natürlich $A \otimes_k K \cong (A \otimes_k k') \otimes_{k'} K$ und die Aussage folgt aus der Bedingung (i). □

Sei nun A eine beliebige endlich erzeugte k–Algebra. Da $A \otimes_k k_{\text{alg}}$ noethersch ist, ist die Anzahl N der Idempotenten von $A \otimes_k k_{\text{alg}}$ endlich. Für jede étale Teilalgebra B von A ist daher $\dim_k B \leq N$. Sind B_1 und B_2 étale Teilalgebren, so ist auch die von B_1 und B_2 erzeugte Teilalgebra

$$B_1 B_2 \coloneqq \operatorname{im}(B_1 \otimes_k B_2 \longrightarrow A)$$

étale, denn sie ist ein Quotient eines Tensorprodukts von étalen k–Algebren. Es folgt, dass eine größte étale Teilalgebra von A existiert.

Definition 77. Wir definieren $\pi_0(A)$ als die (eindeutige) größte étale Teilalgebra von A.

Bemerkung. Die Algebra $\pi_0(A)$ enthält alle Idempotenten e von A, da

$$k[e] \cong \begin{cases} k & \text{falls } e \in k \\ k[X]/(X^2 - X) \cong k^2 & \text{falls } e \notin k. \end{cases}$$

Folgendes Resultat wäre zwar recht elementar zu beweisen, macht aber Arbeit.

Lemma 78. *Sei $k'|k$ eine Körpererweiterung und seien A und B endliche étale k–Algebren. Dann gilt*

(i) $\pi_0(A \otimes_k k') = \pi_0(A) \otimes_k k'$.
(ii) $\pi_0(A \otimes_k B) = \pi_0(A) \otimes_k \pi_0(B)$.

Beweisidee. Die Inklusionen $\pi_0(A \otimes_k k') \supset \pi_0(A) \otimes_k k'$ und $\pi_0(A \otimes_k B) \supset \pi_0(A) \otimes_k \pi_0(B)$ folgen direkt aus Korollar 75 und Korollar 76. Der Beweis der umgekehrten Inklusionen steht in Waterhouse, Kapitel 6.5, oder Milne, Kapitel VIII.2.

Korollar 79. *Für jede endlich erzeugte k–Algebra A und jede algebraisch abgeschlossene Erweiterung $K|k$ ist $\dim_k \pi_0(A)$ gleich der Anzahl der primitiven Idempotenten von $A \otimes_k K$. Hierbei heißt ein idempotentes Element $e \in A \setminus \{0\}$* primitiv, *wenn es keine Zerlegung $e = e_1 + e_2$ in weitere Idempotente e_1, e_2 mit $e_1 e_2 = 0$ gibt. Also ist $\dim_k \pi_0(A)$ ist die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $\operatorname{Spec}(A \otimes_k K)$.*

Beweis. Wegen Lemma 78 ist $\pi_0(A \otimes_k K) = \pi_0(A) \otimes_k K \cong K^{\dim_k \pi_0(A)}$. Da $\pi_0(A \otimes_k K)$ alle Idempotenten von $A \otimes_k K$ enthält, ist $\dim_k \pi_0(A)$ gleich der Anzahl an primitiven Idempotenten von $\pi_0(A \otimes_k K)$, also auch gleich der Anzahl der primitiven Idempotenten von $A \otimes_k K$. $\square$

Sei nun G eine algebraische k–Gruppe und $A = k[G]$ die zugehörige Hopf–Algebra. Dann ist $\pi_0(A)$ eine Hopf–Unteralgebra, denn es gilt $i(\pi_0(A)) \subset \pi_0(A)$ für die Koinverse und $c(\pi_0(A)) \subset \pi_0(A \otimes_k A) = \pi_0(A) \otimes_k \pi_0(A)$ für die Komultiplikation. Also existiert eine algebraische k–Gruppe $\pi_0(G)$ mit $k[\pi_0(G)] = \pi_0(A)$, zusammen mit einem surjektiven Morphismus $G \twoheadrightarrow \pi_0(G)$ induziert von der Inklusion $\pi_0(A) \hookrightarrow A$.

Definition 80. Die algebraische k–Gruppe $\pi_0(G)$ mit $k[\pi_0(G)] = \pi_0(k[G])$ heißt die *Komponentengruppe* von G. Der Kern G^0 des kanonischen Morphismus $G \twoheadrightarrow \pi_0(G)$ heißt die *Zusammenhangskomponente der 1* von G.

Wir haben also wie gewünscht eine exakte Sequenz $1 \longrightarrow G^0 \longrightarrow G \longrightarrow \pi_0(G) \longrightarrow 1$ und wegen Korollar 79 ist auch $|\pi_0(G)|$ gleich der Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $G_{k_{\mathrm{alg}}}$ betrachtet als affines Schema.

Lemma 81. *Für jede Körpererweiterung $k'|k$ ist $\pi_0(G_{k'}) \cong \pi_0(G)_{k'}$ und $(G_{k'})^0 \cong (G^0)_{k'}$.*

Beweis. Wegen der kanonischen Isomorphismen $k'[\pi_0(G_{k'})] = \pi_0(k'[G_{k'}]) \cong \pi_0(k[G] \otimes_k k')$ und $k'[\pi_0(G)_{k'}] \cong k[\pi_0(G)] \otimes_k k' = \pi_0(k[G]) \otimes_k k'$ folgt die erste Behauptung aus Lemma 78. Die zweite Behauptung folgt aus der ersten wegen der Definition von G^0 als $\ker(G \twoheadrightarrow \pi_0(G))$. $\square$

Definition 82. Wir nennen eine algebraische k–Gruppe G

(i) *zusammenhängend*, falls $\pi_0(G) = \{1\}$ ist.
(ii) *étale*, falls $k[G]$ étale ist.

Für jede algebraische k–Gruppe ist die Komponentengruppe $\pi_0(G)$ étale und jeder Morphismus $G \longrightarrow E$ in eine étale algebraische k–Gruppe E faktorisiert eindeutig durch $\pi_0(G)$. Insofern ist $\pi_0(G)$ der größte étale Quotient von G.

Korollar 83. *Sei G eine algebraische k–Gruppe und $k'|k$ eine Körpererweiterung. Dann ist $G_{k'}$ genau dann étale bzw. zusammenhängend, wenn G es ist.*

Beweis. Korollar 76 besagt, dass $k'[G_{k'}] \cong k[G] \otimes_k k'$ genau dann étale ist, wenn $k[G]$ es ist. Lemma 81 besagt, dass $\pi_0(G)$ stabil unter Skalarerweiterung ist, deshalb folgt auch die andere Äquivalenz. $\square$

Proposition 84. *Sei G eine algebraische k–Gruppe. Dann sind äquivalent:*

(i) *G ist zusammenhängend, d.h. $\pi_0(G) = \{1\}$.*
(ii) $\pi_0(k[G]) = k$.
(iii) $\pi_0(k[G])$ *ist ein Körper.*
(iv) $\operatorname{Spec}(k[G])$ *ist zusammenhängend als topologischer Raum, d.h. $k[G]$ hat keine Idempotenten ausser 0 und 1.*
(v) $\operatorname{Spec}(k[G])$ *ist irreduzibel, d.h. $k[G]_{\mathrm{red}}$ ist ein Integritätsring.*
(vi) $G = G^0$.

Beweis. Die Äquivalenz von (i), (ii) und (vi) ist klar, genauso (ii)→(iii). Außerdem ist die Äquivalenz von (iii) und (iv) klar und die Implikation (v)→(iv). Für die Implikation (iii)→(ii) sei $\pi_0(k[G]) = k[\pi_0(G)]$ ein Körper. Die Koeinheit $u\colon k[\pi_0(G)] \longrightarrow k$ ist dann als Homomorphismus von Körpern injektiv und es folgt $k[\pi_0(G)] = k$.

Für (iv)→(v) können wir ohne Einschränkung annehmen, dass k algebraisch abgeschlossen ist, da wir schon die Äquivalenz von (iv) und (i) bewiesen haben und wir eine Injektion $k[G]_{\mathrm{red}} \hookrightarrow k_{\mathrm{alg}}[G_{k_{\mathrm{alg}}}]_{\mathrm{red}}$, induziert von der Inklusion $k[G] \hookrightarrow k[G] \otimes_k k_{\mathrm{alg}}$, haben. Seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ die minimalen Primideale von $k[G]$. Dann existiert ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{m} \not\supset \mathfrak{p}_i$ für $i > 1$, denn sonst hätten wir $\mathfrak{p}_1 \supset \operatorname{Nil}(k[G]) = \bigcap \operatorname{Max}(k[G]) \supset \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_n$, also $\mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{p}_i$ für ein i. Wegen Lemma 53 folgt, dass jedes $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(k[G])$ genau ein minimales Primideal $\mathfrak{p}_i$ enthält, also ist $\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j = k[G]$ für $i \neq j$. Nach dem chinesischen Restsatz existiert ein Isomorphismus

$$k[G]_{\mathrm{red}} \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{n} k[G]/\mathfrak{p}_i.$$

Da $\operatorname{Spec}(k[G]_{\mathrm{red}})$ zusammenhängend ist, da $\operatorname{Spec}(k[G]_{\mathrm{red}}) \cong \operatorname{Spec}(k[G])$ als topologischer Raum, ist dann $k[G]_{\mathrm{red}}$ ein Integritätsring. □

Beispiel. Betrachte μ_3 über $k = \mathbb{Q}$. Die Gruppe μ_3 ist étale, denn

$$k[\mu_3] \cong k[X]/(X^3 - 1) \cong k \times k[X]/(X^2 + X + 1)$$

und $X^2 + X + 1$ ist irreduzibel und separabel über $\mathbb{Q}$. Die Gruppe μ_3 ist nicht zusammenhängend. Der topologische Raum $\operatorname{Spec}(k[\mu_3])$ hat 2 Zusammenhangskomponenten, aber $\operatorname{Spec}(k_{\mathrm{alg}}[\mu_3])$ hat 3 Zusammenhangskomponenten.

Lemma 85. *Sei G eine algebraische k–Gruppe.*

(i) *G ist genau dann étale, wenn G endlich und glatt ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $\operatorname{Lie}(G) = 0$ ist.*
(ii) $\operatorname{Lie}(G) = \operatorname{Lie}(G^0)$.
(iii) *G ist genau dann glatt, wenn G^0 glatt ist.*

Beweis.

(i) Genau dann ist G étale, wenn $k[G]$ eine étale k–Algebra ist, d.h. $k[G]$ ist endlich dimensional und $k[G] \otimes_k k_{\text{alg}}$ ist reduziert. Das ist äquivalent dazu, dass $\dim G = 0$ und $\dim G = \dim_k \operatorname{Lie}(G)$, also folgt auch, dass $\operatorname{Lie}(G) = 0$, wenn G étale ist. Umgekehrt gilt immer $\dim G \leq \dim_k \operatorname{Lie}(G)$ und das impliziert die andere Richtung.

(ii) Es ist $\operatorname{Lie}(G^0) = \operatorname{Lie}(\ker(G \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \pi_0(G))) = \ker(\operatorname{Lie}(G) \longrightarrow \operatorname{Lie}(\pi_0(G)))$. Aber $\operatorname{Lie}(\pi_0(G)) = 0$ wegen (i), also ist $\operatorname{Lie}(G^0) = \operatorname{Lie}(G)$.

(iii) Genau dann ist G glatt, wenn $\dim G = \dim_k \operatorname{Lie}(G) = \dim_k \operatorname{Lie}(G^0)$. Aber es gilt $\dim G^0 = \dim G - \dim \pi_0(G) = \dim G$, also ist genau dann G glatt, wenn G^0 glatt ist. $\square$

III. Einige Klassen von algebraischen Gruppen

III.1. Étale k–Gruppen

Wir wollen étale algebraische k–Gruppen konstruieren und insbesondere (gewöhnliche) endliche Gruppen als algebraische k–Gruppen realisieren. Sei H eine endliche Gruppe. Sei $A := \mathrm{Abb}(H, k)$ die Menge der Abbildungen $H \longrightarrow k$. Das ist eine k–Algebra mit punktweiser Operation. Es gilt $A = \prod_{h \in H} k e_h$, wobei $e_h \in A$ die Abbildung mit $e_h(h') = \delta_{h,h'}$ ist. Wir definieren auf A die Struktur einer Hopf–Algebra wie folgt:

$$\begin{aligned} c(e_h) &= \sum_{xy=h} e_x \otimes e_y, \\ u(e_h) &= \delta_{h,1}, \\ i(e_h) &= e_{h^{-1}}. \end{aligned}$$

Diese Vorschriften definieren tatsächlich k–Algebrenhomomorphismen, denn sie sind k–linear und etwa

$$\begin{aligned} c(e_h)c(e_{h'}) &= \sum_{xy=h} e_x \otimes e_y \sum_{x'y'=h'} e_{x'} \otimes e_{y'} = \sum_{\substack{xy=h \\ x'y'=h'}} e_x e_{x'} \otimes e_y e_{y'} = \\ &= \begin{cases} 0 & h \neq h' \\ \sum_{xy=h} e_x \otimes e_y & h = h' \end{cases} \\ &= c(e_h e_{h'}). \end{aligned}$$

Die restlichen Axiome sind genauso leicht nachzuprüfen.

Definition 86. Wir schreiben H_{const} für die zur Hopf–Algebra $A = \mathrm{Abb}(H, k)$ gehörige algebraische k–Gruppe.

Lemma 87. *Für jede k–Algebra $R \neq 0$, die keine Idempotenten ausser 0 und 1 hat, ist $H_{\mathrm{const}}(R) \cong H$ und $H_{\mathrm{const}}(k) \longrightarrow H_{\mathrm{const}}(R)$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Jeder k–Algebrenhomomorphismus $f\colon A \longrightarrow R$ schickt die Idempotenten e_h auf 0 oder 1 und zwar ist $f(e_h) = 1$ für genau ein $h \in H$, denn für $h \neq h'$ gilt immer $0 = f(0) = f(e_h e_{h'}) = f(e_h)f(e_{h'})$, also ist $f(e_h) = 0$ oder $f(e_{h'}) = 0$. Wäre $f(e_h) = 0$ für alle $h \in H$, so hätten wir $1 = f(1) = f(\sum e_h) = 0$ in R.

Wir erhalten $H_{\mathrm{const}}(R) = \mathrm{Hom}_k(A, R) = \{f_h \colon h \in H\}$, wobei $f_h(e_{h'}) = \delta_{h,h'}$. Es gilt

$$(f_h \cdot f_{h'})(e_{h''}) = \big((f_h, f_{h'}) \circ c\big)(e_{h''}) = \sum_{xy=h''} f_h(e_x) f_{h'}(e_y) = \delta_{hh',h''} = f_{hh'}(e_{h''}).$$

Also erhalten wir einen Isomorphismus $H \cong H_{\mathrm{const}}(R)$, der natürlich in R ist. Insbesondere ist auch $H_{\mathrm{const}}(k) \longrightarrow H_{\mathrm{const}}(R)$ ein Isomorphismus. $\square$

Lemma 88. *Sei H eine endliche Gruppe und G eine algebraische k–Gruppe. Dann definiert*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(H_{\mathrm{const}}, G) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(H_{\mathrm{const}}(k), G(k)) \\ a &\longmapsto a_k \end{aligned}$$

eine Bijektion. Zudem ist $a\colon H_{\mathrm{const}} \longrightarrow G$ genau dann injektiv, wenn a_k das ist.

Beweis. Sei $A = \mathrm{Abb}(H, k)$ die zu H_{const} gehörige Hopf–Algebra. Wir identifizieren $\mathrm{Hom}(H_{\mathrm{const}}, G) = \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Hopfalg}}(k[G], A)$ und $G(k) = \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[G], k)$. Die der fraglichen Abbildung entsprechende Abbildung

$$\psi\colon \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Hopfalg}}(k[G], A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(H, G(k))$$

ist dann durch $\psi(f)(h) = \pi_h \circ f$ gegeben, wobei

$$\pi_h\colon A = \prod_{h \in H} ke_h \longrightarrow ke_h \xrightarrow{\sim} k$$

die Projektion bezeichnet. Wegen $A = \prod ke_h$ ist die Abbildung

$$\varphi\colon \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[G], A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Abb}(H, G(k))$$

mit $\varphi(f)(h) = \pi_h \circ f$ bijektiv. Es bleibt also zu zeigen, dass genau dann f ein Homomorphismus von Hopf–Algebren ist, wenn $\varphi(f)$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir identifizieren $A \otimes_k A = \mathrm{Abb}(H \times H, k)$. Es gilt für $t \in k[G]$, dass

$$c_A \circ f(t) = \sum_{h \in H} f(t)(h) \sum_{xy = h} e_x \otimes e_y,$$

und daher für alle $(h_1, h_2) \in H \times H$, dass

$$\begin{aligned} c_A \circ f(t)(h_1, h_2) = \sum_{h \in H} f(t)(h) \sum_{xy = h} e_x(h_1) e_y(h_2) = f(t)(h_1 h_2) = \\ = \pi_{h_1 h_2} \circ f(t) = \varphi(f)(h_1 h_2)(t). \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$a \otimes b(h_1, h_2) = a(h_1) b(h_2) = \pi_{h_1}(a) \pi_{h_2}(b) = (\pi_{h_1}, \pi_{h_2})(a \otimes b)$$

für alle $a, b \in A = \mathrm{Abb}(H, k)$, also folgt

$$\begin{aligned} f \otimes f \circ c_{k[G]}(t)(h_1, h_2) = (\pi_{h_1}, \pi_{h_2}) \circ f \otimes f \circ c_{k[G]}(t) = (\varphi(f)(h_1), \varphi(f)(h_2)) \circ c_{k[G]}(t) = \\ = (\varphi(f)(h_1) \varphi(f)(h_2))(t) \end{aligned}$$

für alle $t \in k[G]$ und $h_1, h_2 \in H$. Daher ist $c_A \circ f = f \otimes f \circ c_{k[G]}$ genau dann, wenn $\varphi(f)(h_1 h_2) = \varphi(f)(h_1)\varphi(f)(h_2)$ gilt.

Natürlich ist a_k injektiv, wenn a injektiv ist. Umgekehrt genügt es nach Satz 60 zu zeigen, dass $a_{k_{\mathrm{alg}}}$ und $\mathrm{d}a\colon \operatorname{Lie}(H_{\mathrm{const}}) \longrightarrow \operatorname{Lie}(G)$ injektiv sind. Letzteres ist klar wegen $\operatorname{Lie}(H_{\mathrm{const}}) = 0$. Das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
H_{\mathrm{const}}(k) & \xrightarrow{a_k} & G(k) & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Hom}_k(k[G], k) \\
\big\downarrow \wr & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\
H_{\mathrm{const}}(k_{\mathrm{alg}}) & \xrightarrow[a_{k_{\mathrm{alg}}}]{} & G(k_{\mathrm{alg}}) & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Hom}_k(k[G], k_{\mathrm{alg}}),
\end{array}$$

worin $H_{\mathrm{const}}(k) \longrightarrow H_{\mathrm{const}}(k_{\mathrm{alg}})$ nach Lemma 87 ein Isomorphismus ist, zeigt, dass $a_{k_{\mathrm{alg}}}$ injektiv ist. $\square$

Beispiel. Betrachte den Normalisator $N = \mathrm{N}_{\mathrm{GL}_n}(D_n) \supset \mathrm{Z}_{\mathrm{GL}_n}(D_n) = D_n$ der Diagonalmatrizen in GL_n. Dann ist $(S_n)_{\mathrm{const}} \subset N$, denn wir haben einen injektiven Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned}
S_n &\longrightarrow N(k) \subset \mathrm{GL}_n(k) \\
\sigma &\longmapsto P_\sigma
\end{aligned}$$

mit der zu σ gehörigen Permutationsmatrix P_σ.

Übung. Definiere semidirekte Produkte von algebraischen k–Gruppen und zeige, dass $N = D_n \rtimes (S_n)_{\mathrm{const}}$.

Um étale algebraische k–Gruppen $H_{\text{ét}}$ zu konstruieren, gehen wir von einer endlichen Gruppe H mit einer *stetigen* Operation der absoluten Galoisgruppe von k aus.

Definition 89. Sei $\Gamma = \operatorname{Gal}(k_{\mathrm{sep}}|k)$ die absolute Galoisgruppe. Eine Γ–Operation auf einer endlichen Gruppe H heißt *stetig*, falls sie (d.h. der sie definierende Homomorphismus $\Gamma \longrightarrow \operatorname{Aut}(H)$) durch einen endlichen Quotienten von Γ faktorisiert, d.h. von der Operation der Galoisgruppe einer endlichen Galoiserweiterung $L|k$ herrührt.

Ist nun eine stetige Γ–Operation auf H gegeben, betrachten wir die k_{sep}–Algebra $A_{\mathrm{sep}} = \operatorname{Abb}(H, k_{\mathrm{sep}})$ und definieren

$$A = A_{\mathrm{sep}}^{\Gamma} = \{f\colon H \longrightarrow k_{\mathrm{sep}} \colon f({}^{\gamma}h) = {}^{\gamma}f(h)\}$$

als die Invarianten der Γ–Operation mit $({}^{\gamma}f)(h) = {}^{\gamma}f({}^{\gamma^{-1}}h)$ auf A_{sep}. Ist die Γ–Operation auf H trivial, so gilt wegen $k_{\mathrm{sep}}^{\Gamma} = k$, dass $A = \operatorname{Abb}(H, k)$. Im Allgemeinen können wir Folgendes aussagen:

Proposition 90. *Die Algebra $A = A_{\mathrm{sep}}^{\Gamma}$ ist stets eine étale k–Algebra und trägt die Struktur einer Hopf–Algebra, induziert von A_{sep}. Weiter ist $A_{\mathrm{sep}} = A \otimes_k k_{\mathrm{sep}}$ als Hopf–Algebren über k_{sep}, d.h. der kanonische k_{sep}–Algebrenhomomorphismus $A \otimes_k k_{\mathrm{sep}} \longrightarrow A_{\mathrm{sep}}$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $\varphi\colon A \otimes_k k_{\mathrm{sep}} \longrightarrow A_{\mathrm{sep}}$ mit $\varphi(a \otimes \lambda) = \lambda a$ ein Isomorphismus von k_{sep}–Algebren ist. Wäre $\ker\varphi \neq 0$, so wähle $n \geq 1$ minimal, so dass ein $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \lambda_i \in \ker\varphi \smallsetminus \{0\}$ existiert. Insbesondere sind dann für ein solches α die $a_1, \ldots, a_n$ k–linear unabhängig. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $\lambda_1 = 1$ ist und ein $\gamma \in \Gamma$ existiert mit ${}^{\gamma}\lambda_2 \neq \lambda_2$. Dann ist

$$\alpha - {}^{\gamma}\alpha = \sum_{i=2}^{n} a_i \otimes (\lambda_i - {}^{\gamma}\lambda_i) \neq 0$$

und $\alpha - {}^{\gamma}\alpha \in \ker\varphi$, denn $\alpha \in \ker\varphi$ und φ ist Γ-äquivariant. Das ist ein Widerspruch zur Minimalität von n.

Für die Surjektivität von φ sei $f \in A_{\mathrm{sep}}$. Da Γ stetig auf H operiert und $f(H) \subset k_{\mathrm{sep}}$ in einer endlichen Galoiserweiterung von k liegt, existiert eine endliche Galoiserweiterung $L|k$, so dass ${}^{\gamma}f = f$ ist für alle $\gamma \in \Gamma_L = \mathrm{Gal}(k_{\mathrm{sep}}|L)$. Sei $d = [L : k] = [\Gamma : \Gamma_L]$, $\ell_1, \ldots, \ell_d$ eine k–Basis von L und sei $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$ ein Repräsentantensystem der Linksnebenklassen Γ/Γ_L. Dann ist $\Gamma f = \{{}^{\gamma_1}f, \ldots, {}^{\gamma_d}f\}$. Seien

$$f_j = \sum_{i=1}^{d} {}^{\gamma_i}\ell_j {}^{\gamma_i}f$$

für $j = 1, \ldots, d$. Dann sind $f_1, \ldots, f_d \in A$. Da

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{\gamma_i}\ell_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^{\gamma_1}f \\ \vdots \\ {}^{\gamma_d}f \end{pmatrix}$$

und ${}^{\gamma_i}f = f$ für ein i, genügt es zu zeigen, dass die Matrix $\left({}^{\gamma_i}\ell_j\right) \in \mathrm{M}_d(L)$ invertierbar ist. Aus der Galoistheorie ist bekannt, dass die Elemente von $\mathrm{Gal}(L|k)$ betrachtet als Elemente von $\mathrm{End}_k(L)$ linear unabhängig sind. Deshalb sind auch die Zeilen von $\left({}^{\gamma_i}\ell_j\right)$ linear unabhängig, d.h diese Matrix ist invertierbar.

Also haben wir gezeigt, dass $A_{\mathrm{sep}} = A \otimes_k k_{\mathrm{sep}}$ gilt. Um nun eine Hopf–Algebrastruktur auf A zu erhalten, bemerken wir, dass die bekannten k_{sep}–Algebrenhomomorphismus $c\colon A_{\mathrm{sep}} \longrightarrow A_{\mathrm{sep}} \otimes_{k_{\mathrm{sep}}} A_{\mathrm{sep}}$, $u\colon A_{\mathrm{sep}} \longrightarrow k_{\mathrm{sep}}$ und $i\colon A_{\mathrm{sep}} \longrightarrow A_{\mathrm{sep}}$ alle Γ–äquivariant sind. Etwa gilt $({}^{\gamma}e_x)(h) = {}^{\gamma}e_x({}^{\gamma^{-1}}h) = \delta_{x,{}^{\gamma^{-1}}h} = e_{{}^{\gamma}x}(h)$ für alle h, also folgt

$$\begin{aligned}
{}^{\gamma}c(f) &= \sum_{h \in H} {}^{\gamma}f(h) \sum_{xy=h} e_{{}^{\gamma}x} \otimes e_{{}^{\gamma}y} = \\
&= \sum_{h \in H} {}^{\gamma}f(h) \sum_{x'y'={}^{\gamma}h} e_{x'} \otimes e_{y'} \\
&= \sum_{h' \in H} {}^{\gamma}f(h') \sum_{xy={}^{\gamma}h'} e_x \otimes e_y \\
&= \sum_{h \in H} ({}^{\gamma}f)(h) \sum_{xy=h} e_x \otimes e_y = \\
&= c({}^{\gamma}f)
\end{aligned}$$

Daher ist $c(A) \subset (A_{\mathrm{sep}} \otimes_{k_{\mathrm{sep}}} A_{\mathrm{sep}})^{\Gamma}$, $u(A) \subset k_{\mathrm{sep}}^{\Gamma} = k$ und $i(A) \subset A_{\mathrm{sep}}^{\Gamma} = A$. Es bleibt noch zu zeigen, dass $(A_{\mathrm{sep}} \otimes_{k_{\mathrm{sep}}} A_{\mathrm{sep}})^{\Gamma} = A \otimes_k A$ gilt. Dabei ist die Inklusion $(A_{\mathrm{sep}} \otimes_{k_{\mathrm{sep}}} A_{\mathrm{sep}})^{\Gamma} \supset A \otimes_k A$ klar. Es ist $(A_{\mathrm{sep}} \otimes_{k_{\mathrm{sep}}} A_{\mathrm{sep}})^{\Gamma} \cong \mathrm{Abb}(H \times H, k_{\mathrm{sep}})^{\Gamma}$ und $A \otimes_k A$ und $\mathrm{Abb}(H \times H, k_{\mathrm{sep}})^{\Gamma}$ haben beide Dimension $|H|^2$. Daher induzieren c, u und i k–Algebrenhomomorphismen $c_A \colon A \longrightarrow A \otimes_k A$, $u_A \colon A \longrightarrow k$ und $i_A \colon A \longrightarrow A$. Es ist leicht zu zeigen, dass (A, c_A, u_A, i_A) die Hopf–Axiome erfüllt und dass $\varphi \colon A \otimes_k k_{\mathrm{sep}} \longrightarrow A_{\mathrm{sep}}$ ein Homomorphismus von Hopf–Algebren über k_{sep} ist. $\square$

Definition 91. Sei H eine endliche Gruppe mit einer stetigen Operation der absoluten Galoisgruppe $\Gamma = \mathrm{Gal}(k_{\mathrm{sep}}|k)$. Dann schreiben wir $H_{\text{ét}}$ für die zu $A = \mathrm{Abb}(H, k_{\mathrm{sep}})^{\Gamma}$ gehörige étale algebraische k–Gruppe.

Beispiel. Sei $n \geq 1$ und k ein Körper mit $\mathrm{char}(k) = 0$ oder $\mathrm{char}\, k = p \nmid n$. Sei $K = k(\zeta_n)$, wobei ζ_n eine primitive n–te Einheitswurzel bezeichnet. Dann ist $L|k$ galoissch mit $\mathrm{Gal}(L|k) \subset (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times} = \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Dann operiert $\Gamma = \mathrm{Gal}(k_{\mathrm{sep}}|k)$ auf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ via der natürlichen $\mathrm{Gal}(L|k)$–Operation auf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Dann ist $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\text{ét}} \cong \mu_n$: Die Abbildung $f \colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow k_{\mathrm{sep}}$ mit $f([i]) = \zeta_n^i$ ist nach Konstruktion Γ–äquivariant, d.h. $f \in A = A_{\mathrm{sep}}^{\Gamma}$, mit $f^n = 1$. Also definiert f einen k–Algebrenhomomorphismus $k[X]/(X^n - 1) \longrightarrow A$, der ein Isomorphismus von Hopf–Algebren ist (wobei $k[X]/(X^n - 1)$ die Hopf–Algebra zu μ_n ist), wie man leicht nachrechnet.

Für eine étale k–Algebra A ist bereits $A \otimes_k k_{\mathrm{sep}} \cong k_{\mathrm{sep}}^{\dim_k A}$, da $A \otimes_k k_{\mathrm{sep}}$ direktes Produkt von separablen Körpererweiterung von k_{sep} ist. Daher hat für eine étale k–Gruppe G die Gruppe $G(k_{\mathrm{sep}}) \cong \mathrm{Hom}_k(k[G], k_{\mathrm{sep}}) \cong \mathrm{Hom}_{k_{\mathrm{sep}}}(k[G] \otimes_k k_{\mathrm{sep}}, k_{\mathrm{sep}})$ genau $|G| = \dim_k k[G]$ Elemente. Außerdem operiert $\Gamma = \mathrm{Gal}(k_{\mathrm{sep}}|k)$ auf $G(k_{\mathrm{sep}})$ mittels der Operation auf k_{sep}. Diese Operation ist stetig, da für jedes Element $g \in \mathrm{Hom}_k(k[G], k_{\mathrm{sep}})$ das Bild $g(k[G])$ in einer endlichen Galoiserweiterung von k liegt.

Theorem 92. *Sei Γ-**Grp** die Kategorie von endlichen Gruppen mit stetiger Operation von $\Gamma = \mathrm{Gal}(k_{\mathrm{sep}}|k)$ mit Γ–äquivarianten Gruppenhomomorphismen und k- **EtGrp** die*

Kategorie von étalen algebraischen k–Gruppen. Dann definiert

$$\begin{aligned} \Gamma\text{-}\boldsymbol{Grp} &\longrightarrow k\text{-}\ \boldsymbol{EtGrp} \\ H &\longmapsfrom H_{ét} \\ G(k_{\mathrm{sep}}) &\longmapsto G \end{aligned}$$

eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis. Siehe Waterhouse Kapitel 6.4 oder Milne Theorem 2.11.

Hiermit ist die Vorlesung (und somit das Skript) zu Ende.